数学Ａ　図形の性質「空間図形」

２直線の位置関係／２直線のなす角／直線と平面の位置関係／垂線／
平面と直線が垂直／平面の表記／平面の決定条件／２平面の位置関係／
２平面のなす角／★三垂線の定理／
☆３本の脚の長さが等しい四面体と垂線／多面体／
オイラーの多面体定理／正多面体／等面四面体／

□ 2 直線の位置関係

空間内に 2 本の異なる直線 ℓ，m がある．

これらの位置関係は次のようになる．

$\boxed{1}$ ℓ と m が ただ 1 つの共有点 A をもつとき

ℓ と m は **交わる** といい 共有点 A を ℓ と m の **交点** という．

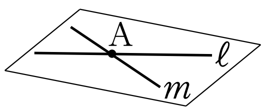
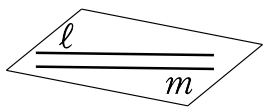
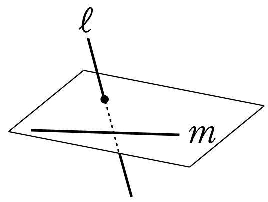
このとき ℓ と m は同一平面上にある．

$\boxed{2}$ ℓ と m が共有点をもたない かつ 同一平面上にあるとき

ℓ と m は **平行** であるといい $\ell \mathbin{/\!/} m$ とかく．

$\boxed{3}$ ℓ と m が 共有点をもたない かつ 同一平面上にないとき

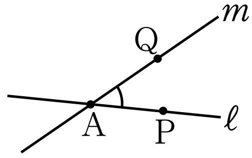
ℓ と m は **ねじれの位置** にあるという．

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
位置関係	交わる	平行	ねじれの位置
グラフ			

□ 2 直線のなす角

空間内に 2 本の異なる直線 ℓ，m がある．

2 直線 ℓ，m のなす角は次のように定義される．



$\boxed{1}$ ℓ と m が ただ 1 つの共有点 A をもつとき

ℓ，m 上にそれぞれ点 A 以外の点 P，Q をとり

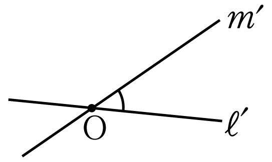
90° 以下となる $\angle$PAQ を 2 直線 ℓ，m の **なす角** とする．

$\boxed{2}$ ℓ と m が 共有点をもたない とき

1 点 O を通り ℓ，m にそれぞれ平行な直線 ℓ'，m' を引くと

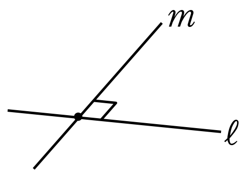
ℓ'，m' のなす角は，点 O の取り方に関係なく一定である．

この角を 2 直線 ℓ，m の **なす角** とする．



2 直線 ℓ，m の なす角が 90° であるならば

ℓ と m は **垂直**（すいちょく） であるといい $\ell \perp m$ とかく．



垂直な 2 直線が交わるとき，それらは **直交**（ちょっこう） するという．

㊟補 2 直線 ℓ，m のなす角が 0° であるならば，ℓ と m は一致するか平行になる．

□直線と平面の位置関係

空間内に直線 ℓ と平面 α がある.

これらの位置関係は次のようになる.

$\boxed{1}$ 直線 ℓ と平面 α がただ 1 つの共有点 A をもつとき

ℓ と α は **交わる** といい，共有点 A を ℓ と α の **交点** という.

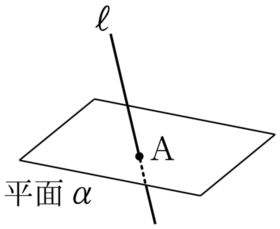
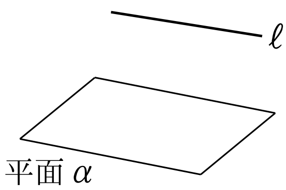
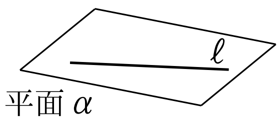
$\boxed{2}$ 直線 ℓ と平面 α が 共有点をもたない とき

ℓ と α は **平行** であるといい $\ell \,/\!/\, \alpha$ とかく.

$\boxed{3}$ 直線 ℓ と平面 α が 異なる 2 点を共有する とき

ℓ は α 上にある.

このとき，直線 ℓ 上の任意の点は平面 α 上にある.

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
位置関係	交わる	平行である	直線が平面上にある
グラフ			

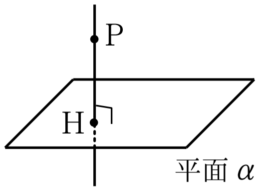
□垂線

平面 α 上にない点 P を通り，α に垂直な直線 がただ 1 つある．

この直線を点 P から平面 α に下ろした 垂線（すいせん） という．

平面 α と垂線の交点を H として

点 P から垂線 PH を下ろす という．



線分 PH の長さを点 P と平面 α の距離（きょり） という．

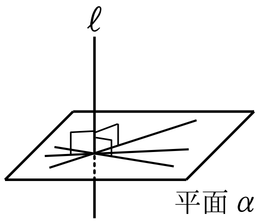
また，点 H を 垂線の足（あし） という．

□平面と直線が垂直

平面 α と直線 ℓ について

直線 ℓ が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき

ℓ と α は 垂直であるといい　$\alpha \perp \ell$ とかく．

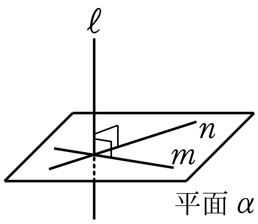


㊓ 直線 ℓ を平面 α の 法線（ほうせん） という．

㊕

直線 ℓ が平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば

$$\ell \perp \alpha$$

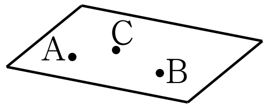


平面の表記

一直線上にない 3 点 A，B，C があるとき，

その 3 点を通る平面がただ 1 つに決まる．

この平面を **平面 ABC** という．

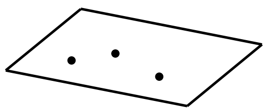


平面の決定条件

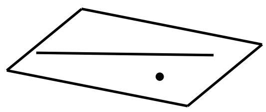
空間において，

次のうち 1 つが与えられると，それらを満たす平面がただ 1 つに定まる．

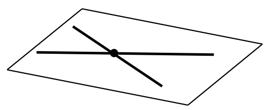
$\boxed{1}$



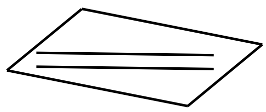
$\boxed{2}$



$\boxed{3}$



$\boxed{4}$



$\boxed{1}$ 一直線上にない 3 点が与えらえる．

$\boxed{2}$ 1 つの直線とその上にない 1 点が与えられる．

$\boxed{3}$ 交わる 2 直線が与えらえる．

$\boxed{4}$ 平行な 2 直線が与えらえる．

□ 2 平面の位置関係

空間内に 2 つの異なる平面 α, β がある.

これらの位置関係は次のようになる.

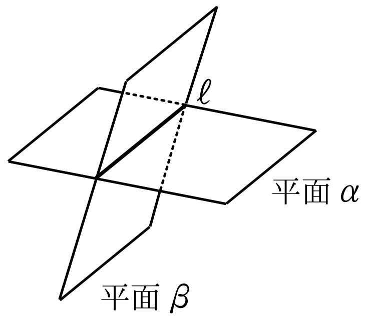
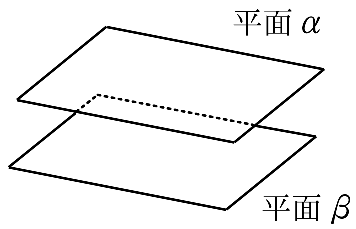
$\boxed{1}$ 2 平面 α, β が共有点をもつとき

この 2 平面はその点を通る直線 ℓ を共有する.

このとき α と β は **交わる** といい, 共有する直線 ℓ を α と β の **交線**(こうせん) という.

$\boxed{2}$ 2 平面 α, β が共有点をもたないとき

α と β は **平行** であるといい $\alpha \parallel \beta$ とかく.

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
位置関係	交わる	平行である
グラフ		

□ 2 平面のなす角

交線 ℓ で交わる 2 つの平面 α，β がある．

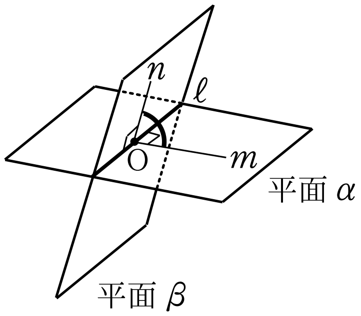
交線 ℓ 上の 1 点 O を通り，平面 α，β 上にそれぞれ ℓ と垂直な直線 m，n を引くと m，n のなす角は点 O のとり方に関係なく一定である．

この角を 2 平面 α，β の **なす角** という．

2 平面 α，β のなす角が 90° であるとき

α と β は **垂直** である または **直交** するといい

$\alpha \perp \beta$ とかく．



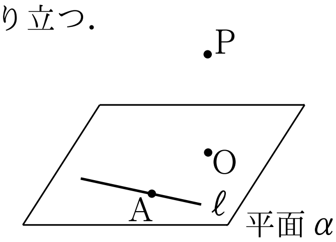
㊗ 2 つの平面 α，β のぞれぞれの法線のなす角を 2 平面のなす角と考えることもできる．

★三垂線の定理

α を平面とし，P を平面 α 上にない点とする．

ℓ を平面 α 上の直線とし，A を直線 ℓ 上の点，

O を平面 α 上にあり直線 ℓ 上にない点とするとき，次が成り立つ．



$\boxed{1}$ $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{OA} \perp \ell$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{PA} \perp \ell$

$\boxed{2}$ $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{PA} \perp \ell$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{OA} \perp \ell$

$\boxed{3}$ $\mathrm{PA} \perp \ell$, $\mathrm{OA} \perp \ell$, $\mathrm{PO} \perp \mathrm{AO}$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{PO} \perp \alpha$

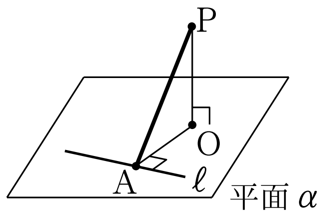
考 $\boxed{1}$ $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{OA} \perp \ell$ とする．

$\mathrm{PO} \perp \alpha$ より $\mathrm{PO} \perp \ell$

ℓ は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，OA に垂直なので

$\ell \perp$ 平面 AOP

よって PA は平面 AOP 上にあるから $\mathrm{PA} \perp \ell$



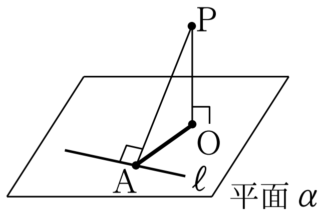
$\boxed{2}$ $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{PA} \perp \ell$ とする．

$\mathrm{PO} \perp \alpha$ より $\mathrm{PO} \perp \ell$

ℓ は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，PA に垂直なので

$\ell \perp$ 平面 AOP

よって PA は平面 AOP 上にあるから $\mathrm{OA} \perp \ell$



$\boxed{3}$ $\mathrm{PA} \perp \ell$, $\mathrm{OA} \perp \ell$, $\mathrm{PO} \perp \mathrm{AO}$ とする．

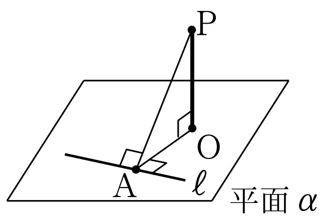
ℓ は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA，OA に垂直なので

$\ell \perp$ 平面 AOP

PO は平面 AOP 上にあるから $\mathrm{PO} \perp \ell$

よって PO は α 上の交わる 2 直線 AO，ℓ に垂直であるから

$\mathrm{PO} \perp \alpha$



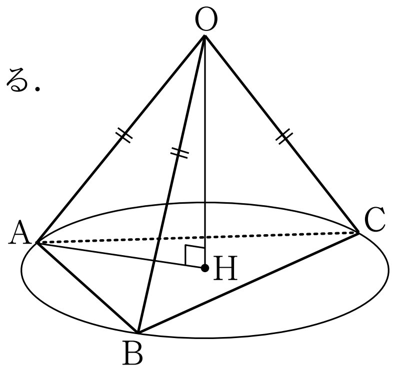
☆３本の脚の長さが等しい四面体と垂線

四面体 OABC があり $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ を満たすとする.

このとき

点 O から平面 ABC へ垂線 OH を下ろすと

点 H は △ABC の **外心** になる.



㊓ 平面 ABC を点 O の対面という.

㊟ $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\angle\mathrm{OHA}=\angle\mathrm{OHB}=\angle\mathrm{OHC}=90^\circ$，OH は共通より

$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$$

よって $\mathrm{HA}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}$ であるから点 H は △ABC の外心である.

多面体

平面だけで囲まれた立体を **多面体**（ためんたい） といい，

へこみのない多面体を **凸多面体**（とつためんたい） という．

n 個の面で囲まれている多面体を **n 面体**（めんたい） という．

どの面もすべて合同な多角形である多面体を **正多面体**（せいためんたい） といい，

n 個の合同な多角形で囲まれている多面体を **正 n 面体**（せい めんたい） という．

㊀例 三角錐，三角柱などを多面体という．
三角錐は 4 個の面で囲まれているので四面体，
三角柱は三角形 2 個と，四角形 3 個の 5 個の面で囲まれているので五面体という．

オイラーの多面体定理

多面体の

頂点 (vertex) の数を v，辺 (edge) の数を e，面 (face) の数を f とするとき

任意の多面体について

$$v - e + f = 2$$

すなわち（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝ 2

例 三角錐について

頂点は 4 個，辺は 6 個，面は 4 個

$v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$

例 三角柱について

頂点は 6 個，辺は 9 個，面は 5 個

$v - e + f = 6 - 9 + 5 = 2$

正多面体

2 つの条件

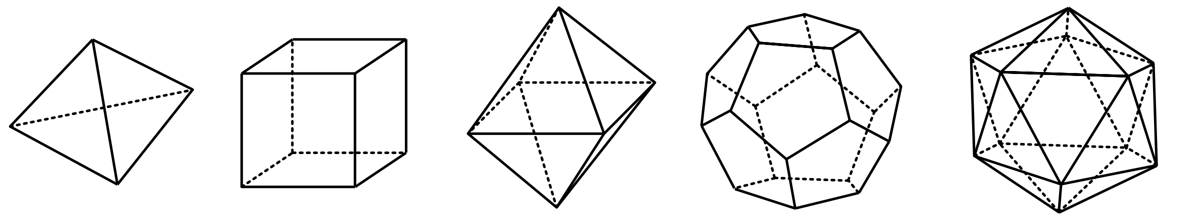
$\boxed{1}$ 各面はすべて合同な正多角形である

$\boxed{2}$ 各頂点に集まる面の数はすべて等しい

をみたす凸多面体を **正多面体** という.

これらは次の **5 種類**しかない.

〔正四面体〕〔正六面体〕〔正八面体〕〔正十二面体〕〔正二十面体〕



正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5

㊓ 正多面体でもオイラーの多面体定理は成り立つ.

㊓ 正 n 面体ならば面の数 $f=n$ はすぐわかる.

また，面はすべて正 n 角形で，1 面あたり辺は n 個で，面の数 f だけ辺はあるが，

2 つの面でひとつの辺を共有するので　辺の数は　$e=\dfrac{n\times f}{2}$　となる.

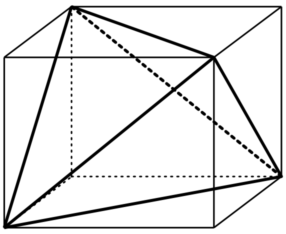
さらに，1 面あたり頂点は n 個で，面の数 f だけ頂点はあるので，頂点に集まる面の数を m として，頂点の数は $v=\dfrac{n\times f}{m}$　となる.

例えば，正十二角形だと　$f=12$，$e=\dfrac{12\times 5}{2}=30$，$v=\dfrac{12\times 5}{3}=20$

☆等面四面体

4 つの面がすべて合同な四面体を 等面四面体（とうめんしめんたい） という.

等面四面体には次の性質がある.



1 4 つの合同な面は鋭角三角形である.

2 直方体に埋め込むことができる.