数学Ａ　図形の性質「平面図形」

線分の内分点 / 線分の外分点 / 同位角 / 錯角 / 対頂角 / 合同を表す記号 /
三角形の合同条件 / 直角三角形の合同条件 / 相似を表す記号 /
三角形の相似条件 / 三角形と平行線と比 / 中線連結定理 / 平行線と比 /
二等辺三角形の用語 / 二等辺三角形の性質 / 二等辺三角形の中線 /
内角の二等分線と比 / ★外角の二等分線と比 / 三角形の外心 /
三角形の内心 / 三角形の重心 / 三角形の垂心 / 三角形の傍心 /
正三角形の性質 / 正三角形と外心・内心・重心・垂心 /
三角形の内角と外角の関係 / 三角形の３辺の長さの関係 /
三角形の成立条件 / 三角形の辺と角の大小関係 / チェバの定理 /
★チェバの定理の逆 / メネラウスの定理 / 台形 / 等脚台形 /
平行四辺形の性質 / 長方形・菱形・正方形 / 四角形の対角線の性質 /
多角形 / 円周角の定理 / 円周角と中心角の関係 / 直径と円周角 /
円の内部と外部の角の大きさ / 円に内接する四角形の内角と外角 /
円と直線の位置関係 / 接線と弦のつくる角の定理（接弦定理）/
円外の点からの接線 / ☆円に外接する四角形 / 方べきの定理 /
２つの円の位置関係 / ☆三角形の内角の二等分線と線分の関係 /
☆トレミーの定理（プトレマイオスの定理）/

線分の内分点

$m,\ n$ を正の数とする．

点 P が線分 AB 上にあって $\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ のとき

点 P は線分 AB を $m : n$ に 内分(ないぶん)する という．

とくに 点 M が線分 AB を 1 : 1 に内分する点とすると

点 M は線分 AB の 中点(ちゅうてん) という．

線分の外分点

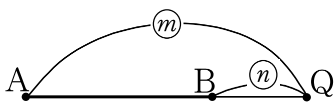
$m,\ n$ を正の数とする．

点 Q が線分 AB の延長上にあって

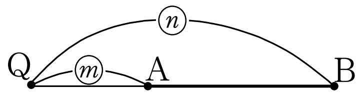
$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$ のとき

点 Q は線分 AB を $m : n$ に 外分(がいぶん)する という．

〔$m > n$ のとき〕



〔$m < n$ のとき〕



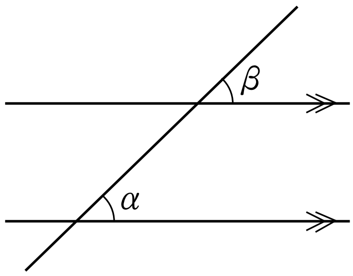
□同位角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

どういかく
これを 同位角は等しい という.



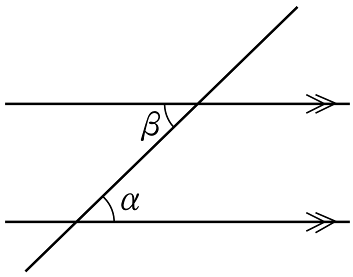
□錯角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

さっかく
これを 錯角は等しい という.



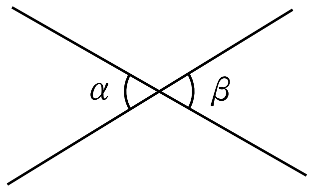
□対頂角

右図のように

交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

たいちょうかく
これを 対頂角は等しい という.



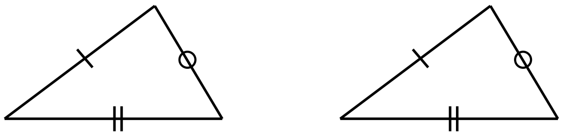
□合同を表す記号

$\triangle$ABC と $\triangle$DEF が 合同(ごうどう) のとき $\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$ と表す.

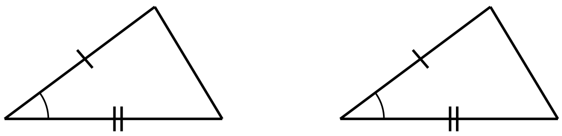
□三角形の合同条件

三角形が合同になる条件は次である.

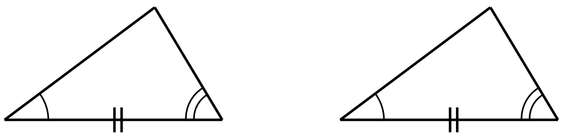
$\boxed{1}$ 3 辺がそれぞれ等しい



$\boxed{2}$ 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい



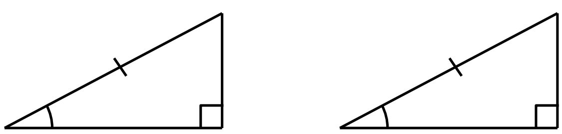
$\boxed{3}$ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい



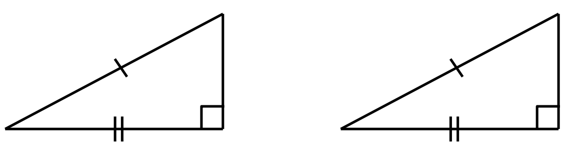
□直角三角形の合同条件

直角三角形が合同になる条件は次である.

$\boxed{1}$ 斜辺と 1 つの鋭角が それぞれ等しい



$\boxed{2}$ 斜辺とほかの 1 辺がそれぞれ等しい



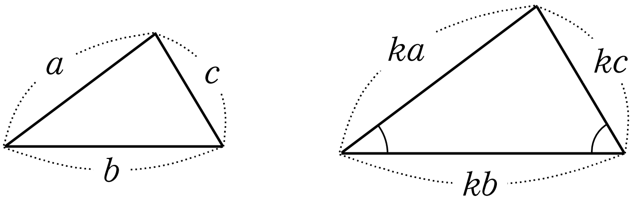
□相似を表す記号

$\triangle$ABC と $\triangle$DEF が 相似(そうじ) のとき $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ と表す.

□三角形の相似条件

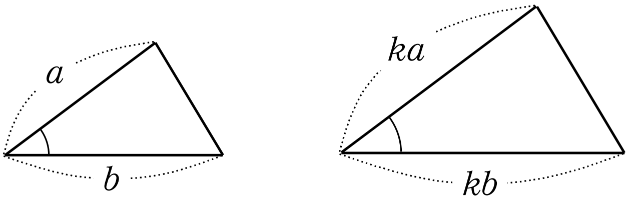
三角形が相似になる条件は次である.

$\boxed{1}$ 3 辺の辺の比が すべて等しい



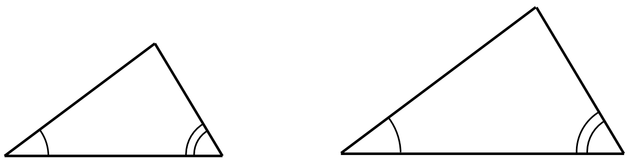
← 相似比 1 : k

$\boxed{2}$ 2 辺の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



← 相似比 1 : k

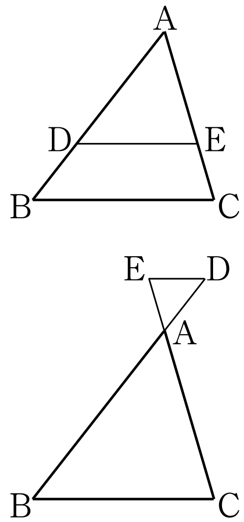
$\boxed{3}$ 2 組の角がそれぞれ等しい



□三角形と平行線と比

$\triangle$ABC があり，

直線 AB，AC 上にそれぞれ D，E があるとき



$\boxed{1}$ $DE \,/\!/\, BC \iff AD : AB = AE : AC$

$\boxed{2}$ $DE \,/\!/\, BC \iff AD : DB = AE : EC$

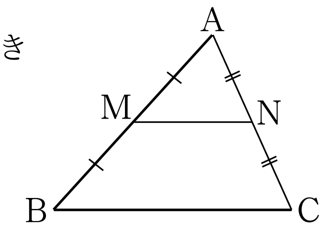
$\boxed{3}$ $DE \,/\!/\, BC \implies AD : AB = DE : BC$

(注) $\boxed{3}$ は $\Longleftarrow$ が成り立たない．

(考) $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ より相似比からわかる．

□中線連結定理

$\triangle$ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき



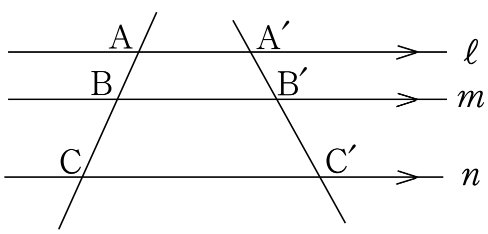
$$MN \,/\!/\, BC \text{ かつ } MN = \frac{1}{2}BC$$

□平行線と比

右図のように，平行な 3 直線 ℓ，m，n があり，

その 3 直線と交わる 2 直線があり，交点を

A，B，C，A$'$，B$'$，C$'$ とするとき



$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

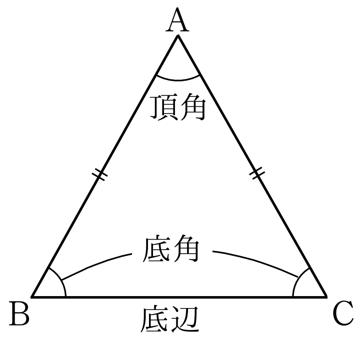
□二等辺三角形の用語

AB ＝ AC となる二等辺三角形 ABC において

1 ∠BAC を 頂角（ちょうかく）という．

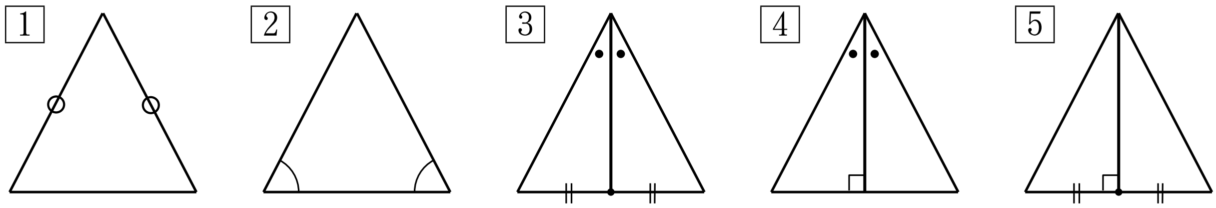
2 ∠ABC と ∠ACB を 底角（ていかく）という．

3 辺 BC を 底辺（ていへん）という．



□二等辺三角形の性質

二等辺三角形は次のような性質がある．



1 2 辺の長さが等しい（定義）

2 底角は等しい

3 頂角の二等分線は底辺の中点を通る

4 頂角の二等分線は底辺と垂直に交わる

5 底辺の垂直二等分線は頂点を通る

□二等辺三角形の中線

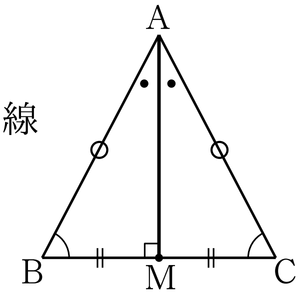
AB ＝ AC となる二等辺三角形 ABC において

辺 BC の中点を M とすると，中線 AMは

∠BAC の二等分線，線分 BC への垂線，線分 BC の垂直二等分線

になっている．

このとき $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$



補 頂角の二等分線，頂点から底辺に引いた中線，垂線，底辺の垂直二等分線はすべて一致する．

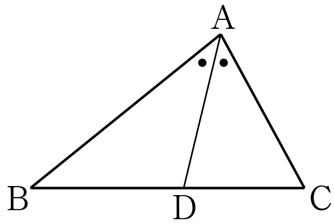
□内角の二等分線と比

△ABC の ∠A の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB：AC に内分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



㊕（平行線を考える）

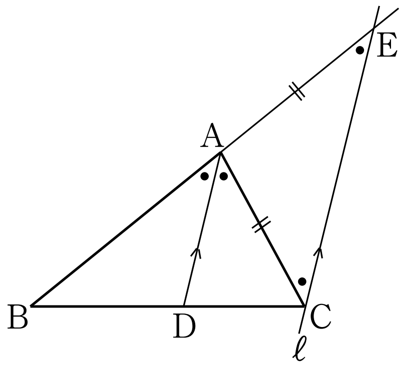
直線 AD に平行で点 C を通る直線を ℓ とする.

直線 ℓ と直線 BA の交点を E とすると

直線 AD と直線 ℓ は平行だから

∠ACE ＝ ∠AEC　であるから　AC ＝ AE

よって　AB : AC ＝ AB : AE ＝ BD : DC



㊗ AB ＝ AC のとき

△ABC は二等辺三角形となり

BD ＝ DC であるから

AB : AC ＝ BD : DC ＝ 1 : 1

★外角の二等分線と比

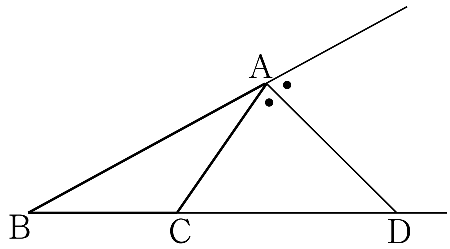
$AB \neq AC$ とする.

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

点 D は線分 BC を $AB : AC$ に外分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



㊫(平行線を考える)

Ⓐ $AB > AC$ のとき

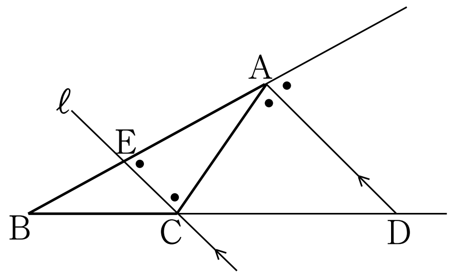
直線 AD に平行で点 C を通る直線を ℓ とする.

直線 ℓ と直線 BA の交点を E とすると

直線 AD と直線 ℓ は平行である.

$\angle ACE = \angle AEC$ であるから $AC = AE$

$AB : AC = AB : AE = BD : DC$



Ⓘ $AB < AC$ のとき Ⓐ と同様である.

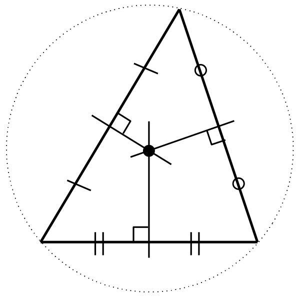
㊛ $AB = AC$ のとき，$\angle A$ の外角の二等分線は辺 BC と平行になり，点 D は存在しない.

三角形の外心

三角形の 3 つの辺の垂直二等分線の交点を

がいしん
三角形の **外心** という．

外心は三角形の外接円の中心である．



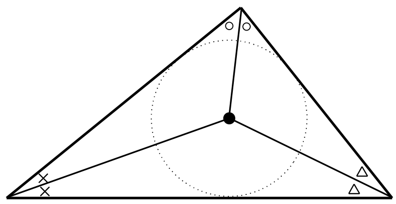
Ⓖ △ABC の外心 O

三角形の内心

三角形の 3 つの内角の二等分線の交点を

ないしん
三角形の **内心** という．

内心は三角形の内接円の中心である．



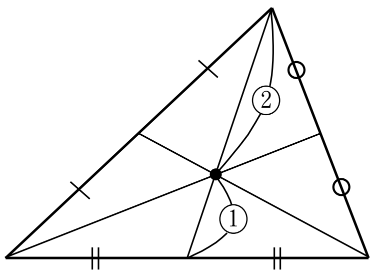
Ⓖ △ABC の内心 I

三角形の重心

三角形の 3 つの**中線**の交点を

じゅうしん
三角形の **重 心** という．

重心は各中線を右図のように 2 : 1 に内分する．



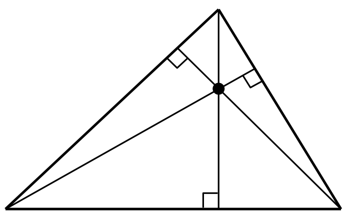
Ⓖ △ABC の重心 G

三角形の垂心

三角形の各頂点から

対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点を

すいしん
三角形の **垂心** という．



Ⓖ △ABC の垂心 H

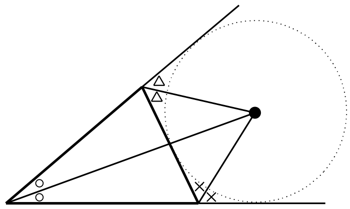
★三角形の傍心

三角形の 1 つの内角の二等分線と

他の 2 つの頂点における外角の二等分線の交点を

三角形の 傍心（ぼうしん） という．

傍心は三角形の 1 つの内角に対する傍接円（ぼうせつえん）の中心である．

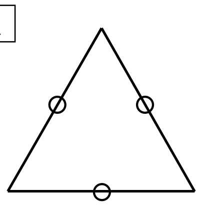
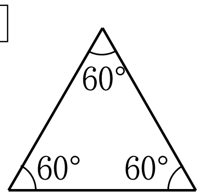


㊟ 傍心は一つの三角形に対して 3 つある．

Ⓖ △ABC の傍心 P_1，P_2，P_3

□正三角形の性質

正三角形は次のような性質がある.

1  2 

1 3 辺の長さが等しい（定義）

2 3 つの内角はすべて 60° で等しい

正三角形の外心・内心・重心・垂心

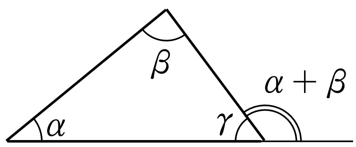
1 正三角形は外心，内心，重心，垂心のすべてが一致する.

2 外心，内心，重心，垂心のうちの 2 つが一致する三角形は正三角形である.

□三角形の内角と外角の関係

右図において $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

すなわち



$\boxed{1}$ 三角形の内角の和は 180°

$\boxed{2}$ 三角形の外角はそれと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい

三角形の 3 辺の長さの関係

三角形 において

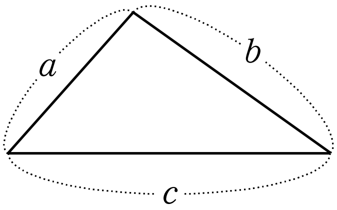
（1 辺の長さ）＜（残り 2 辺の長さの和）

三角形の成立条件

3 つの数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$a>0$，$b>0$，$c>0$ のもとで

$$\begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \\ c<a+b \end{cases} \iff |a-b|<c<a+b$$



すなわち

（2 辺の長さの差）＜（1 辺の長さ）＜（2 辺の長さの和）

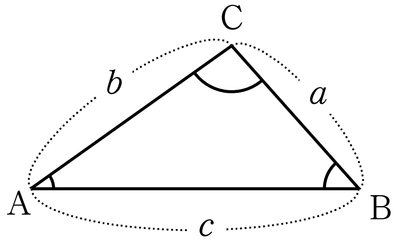
とくに c が最大の長さになるとき $c<a+b$ のみでよい.

㊓ $|a-b|<c$ ならば $|a-b| \geqq 0$ であることから $c>0$ も成り立つ.

三角形の辺と角の大小関係

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{BAC}=A$，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$

となる $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して



$$a<b<c \iff A<B<C$$

すなわち

$\boxed{1}$（短い辺に対角）＜（長い辺の対角）

$\boxed{2}$（小さい角の対角）＜（大きい角の対辺）

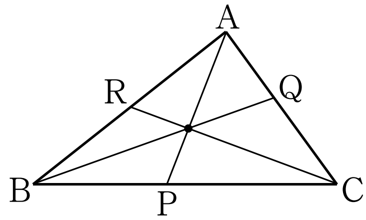
チェバの定理

$\triangle$ABC において，3 辺 BC，CA，AB またはその延長線上にそれぞれ

点 P，Q，R があり，

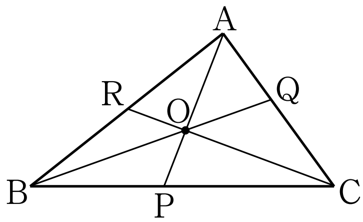
3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



㊫ 3 直線 AP，BQ，CR が交わる 1 点を O として面積比より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OAC}}$$
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OBA}}$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OCB}}$$



よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OAC}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}=1$$

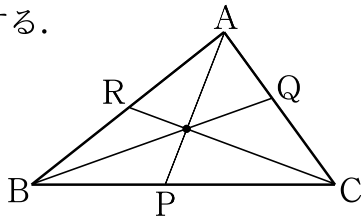
★チェバの定理の逆

△ABC において，3 直線 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとる．

ただし，P，Q，R はいずれも A，B，C と異なる点とする．

このとき $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ ならば

3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

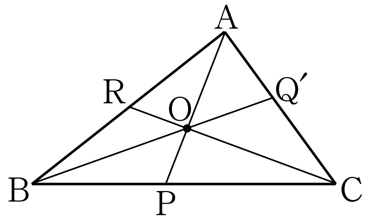


㋘ $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ ……①

① が成り立つとする．

直線 AP と直線 CR の交点を O とし，

直線 BO と辺 CA の交点を Q′ とする．



3 直線 AP，BQ′，CR は 1 点で交わるのでチェバの定理から

$$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ'}}{\mathrm{Q'A}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \quad \cdots\cdots②$$

① ＝ ② が成り立つので

$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathrm{CQ'}}{\mathrm{Q'A}}$ すなわち $\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{Q'A}=\mathrm{CQ'}\cdot\mathrm{QA}$

ここで $\mathrm{Q'A}=\mathrm{CA}-\mathrm{CQ'}$，$\mathrm{QA}=\mathrm{CA}-\mathrm{CQ}$ が成り立つので代入して

$$\mathrm{CQ}(\mathrm{CA}-\mathrm{CQ'})=\mathrm{CQ'}(\mathrm{CA}-\mathrm{CQ})$$

すなわち $\mathrm{CA}(\mathrm{CQ}-\mathrm{CQ'})=0$

$\mathrm{CA}\neq 0$ であるから $\mathrm{CQ}=\mathrm{CQ'}$

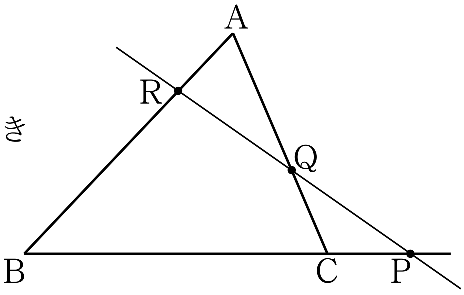
よって $\mathrm{Q}=\mathrm{Q'}$ であるから 3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

メネラウスの定理

ある直線が △ABC の 3 辺 BC，CA，AB

またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



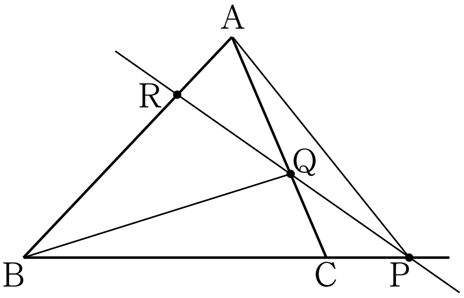
注 逆も成り立つ．

考 面積比より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle\mathrm{QBP}}{\triangle\mathrm{QCP}}$$
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{QCP}}{\triangle\mathrm{QAP}}$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{QAP}}{\triangle\mathrm{QBP}}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{QBP}}{\triangle\mathrm{QCP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{QCP}}{\triangle\mathrm{QAP}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{QAP}}{\triangle\mathrm{QBP}}=1$$



考 点 A を通り，直線 PR に平行な直線と直線 BP の交点を E とする．

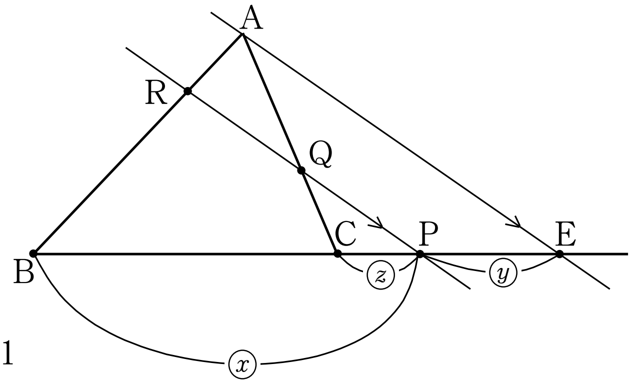
BP : PC : PE ＝ x : y : z とすると

線分の比を考えて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{z}$$
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{z}{y}$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{y}{x}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$$



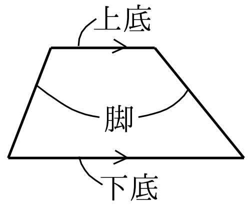
□台形

少なくとも 1 組の向かい合う辺が平行である四角形を **台形**（だいけい） という．

平行な 2 本の向かい合う辺を台形の **底辺**（ていへん） といい，

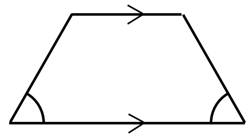
そのうち一方を **上底**（じょうてい），他方を **下底**（かてい） という．

また，もう 1 組の向かい合う辺を台形の **脚**（きゃく） という．



□等脚台形

1 つの底辺の両端の内角が等しい台形を **等脚台形**（とうきゃくだいけい） という．

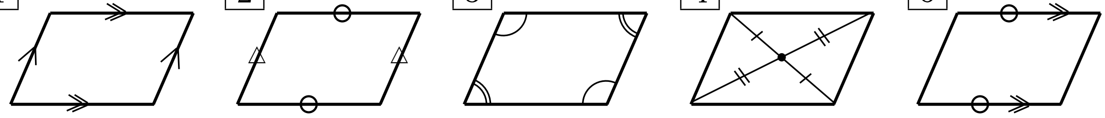


㊟ 脚が等しいという定義ではない．長方形でない平行四辺形は等脚台形ではない．

□平行四辺形の性質

平行四辺形（へいこうしへんけい）は次の性質がある．

1 2 3 4 5



1　2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行である（定義）

2　2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい

3　2 組の向かい合う角がぞれぞれ等しい

4　対角線がそれぞれの中点で交わる

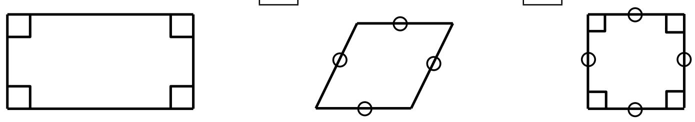
5　1 組の向かい合う辺が平行で長さが 等しい

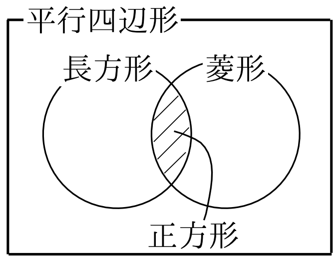
㊟ 1 ～5 のうち 1 つが成り立てば平行四辺形である．

□長方形・菱形・正方形

平行四辺形には次のような四角形がある．

1 2 3





1　4 つの角が等しい四角形を 長方形（ちょうほうけい） という．

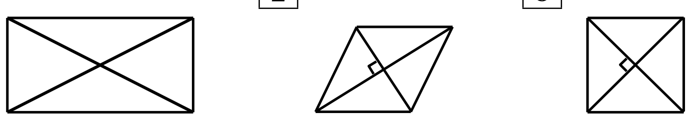
2　4 つの辺の長さが等しい四角形を 菱形（ひしがた） という

3　4 つの角が等しい かつ 4 つの辺の長さが等しい四角形を 正方形（せいほうけい） という．

□四角形の対角線の性質

四辺形の対角線について，次の性質がある．

1 2 3



1　長方形の対角線の長さは等しい

2　菱形の対角線は垂直に交わる

3　正方形の対角線の長さは等しい かつ 垂直に交わる

多角形

線分だけで囲まれた平面図形を **多角形**（たかっけい） という.

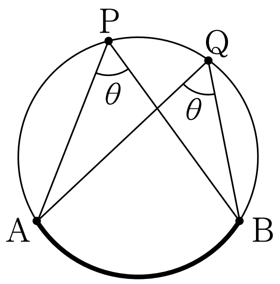
多角形を囲む線分を多角形の **辺**（へん） という.

2 つの辺が交わる点をその多角形の **頂点**（ちょうてん） という.

n 個の辺をもつ多角形を **n 角形**（かっけい） または **n 辺形**（へんけい） という.

n 個の辺の長さがすべて等しい多角形を **正 n 角形**（せい かっけい） という.

□円周角の定理



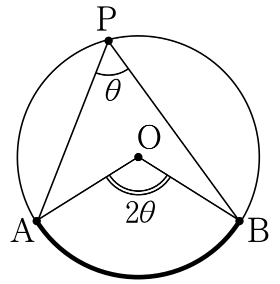
右の図のように円周上に異なる 4 点 A，B，P，Q があり

2 点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあるとき

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

すなわち　同じ弧に対する円周角は等しい．

□円周角と中心角の関係



右の図のように

点 O を中心とする円上に異なる 3 点 A，B，P があり

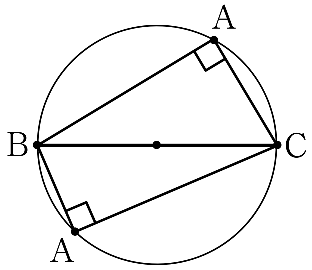
弧$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に P がないとき

1 $\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{APB}$

2 $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$

すなわち　同じ弧に対する円周角と中心角の大きさの比は 1：2

□直径と円周角



円上に異なる 3 点 A，B，C があるとき

線分 BC が円の直径 $\Longleftrightarrow$ $\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$

すなわち

1 半円の弧（直径）に対する円周角は直角

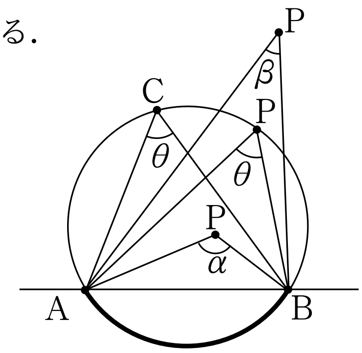
2 直角三角形があれば斜辺は外接円の直径

円の内部と外部の角の大きさ

円上に異なる 3 点 A，B，C がある．

この平面上で直線 AB に関して点 C と同じ側に点 P をとる．

このとき，$\angle\mathrm{APB}$ の大きさについて



1 点 P が円の周上 $\iff$ $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ACB}$

2 点 P が円の内部 $\iff$ $\angle\mathrm{APB} > \angle\mathrm{ACB}$

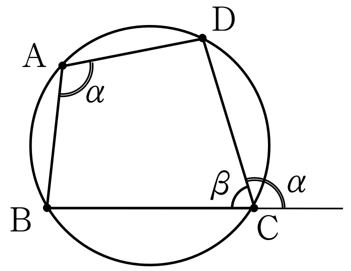
3 点 P が円の外部 $\iff$ $\angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{ACB}$

点 P が円の周上，内部，外部のときの $\angle\mathrm{APB}$ をそれぞれ θ，α，β とすると

$$\beta < \theta < \alpha$$

□円に内接する四角形の内角と外角

凸四角形 ABCD が円に内接するとき



$\boxed{1}$　四角形 ABCD の対角の和は 180°

$\boxed{2}$　四角形 ABCD の外角は
それと隣り合う内角の対角に等しい

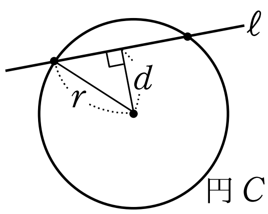
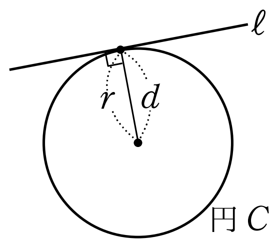
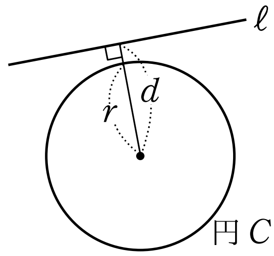
右図のように $\angle\mathrm{BAD}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCD}=\beta$ とすると $\alpha+\beta=180^\circ$

円と直線の位置関係

平面上に円 C と直線 ℓ がある．

円 C の中心と直線 ℓ の距離を d，円 C の半径を r として，

円 C と直線 ℓ の位置関係は次のようになる．

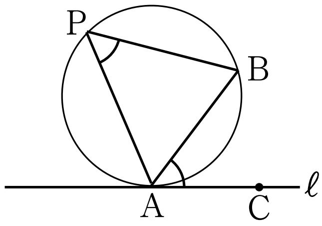
d と r	$d < r$	$d = r$	$d > r$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
グラフ			

接線と弦のつくる角の定理（接弦定理）

$\triangle$ABP の外接円の点 A における接線を ℓ とし

右の図のように点 C を ℓ 上にとるとき

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{APB}$$



すなわち，弦 AB と点 A における接線のなす角は

その角内にある $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しい.

考 $\angle \mathrm{BAC} = \theta \ (0° < \theta < 90°)$ とおく.

円上に AP′ が直径となるように点 P′ をとると $\angle \mathrm{ABP'} = 90°$

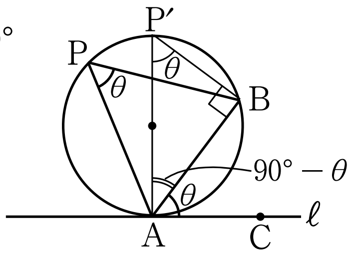
$\mathrm{AP'} \perp \ell$ なので $\angle \mathrm{CAP'} = 90°$

$\angle \mathrm{BAP'} = 90° - \theta$ であるから $\angle \mathrm{AP'B} = \theta$

円周角の定理から $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AP'B} = \theta$

よって $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{APB} \ (= \theta)$

$\theta = 90°$，$90° < \theta < 180°$ のときも成り立つ.

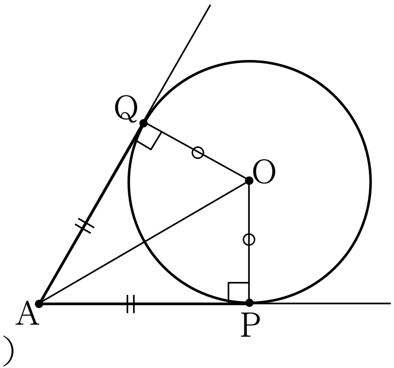


□円外の点からの接線

平面上に中心が O の円と外部に点 A がある．

点 A から円へ接線を 2 本引き， 接点を P，Q とすると

$\triangle \mathrm{OPA} \equiv \triangle \mathrm{OQA}$ であるから，次が成り立つ．



$\boxed{1}$ $\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$（接線の長さは等しい）

$\boxed{2}$ $\angle\mathrm{OAP} = \angle\mathrm{OAQ}$（直線 AO は $\angle\mathrm{PAQ}$ の二等分線）

$\boxed{3}$ $\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{AOQ}$（直線 OA は $\angle\mathrm{POQ}$ の二等分線）

考 点 P，Q は接点なので $\angle\mathrm{OPA} = \angle\mathrm{OQA} = 90^\circ$

円の半径より $\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$

OA は共通である．

斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい直角三角形であるから $\triangle\mathrm{OPA} \equiv \triangle\mathrm{OQA}$

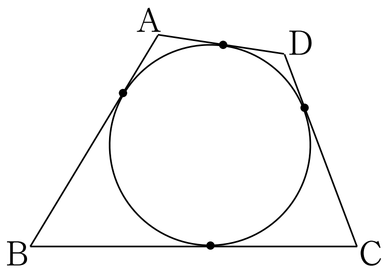
☆円に外接する四角形

四角形 ABCD が円に外接するとき

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$$

すなわち

四角形が円に外接するとき 対辺の和 が等しい.



㊟ 辺 AB，BC，CD，DA と円との接点をそれぞれ P，Q，R，S とおく.

$\mathrm{AP}=\mathrm{AS}=x$

$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=y$

$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=z$

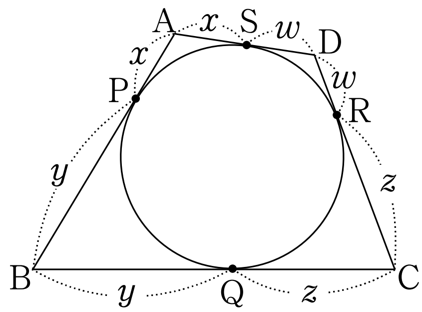
$\mathrm{DR}=\mathrm{DS}=w$

とすると

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CR}+\mathrm{DR}=x+y+z+w$

$\mathrm{AD}+\mathrm{BC}=\mathrm{AS}+\mathrm{DS}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ}=x+y+z+w$

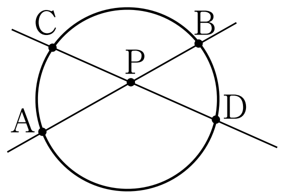
よって $\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$



方べきの定理

定点 P を通る直線と円が 2 つの交点をもつとき

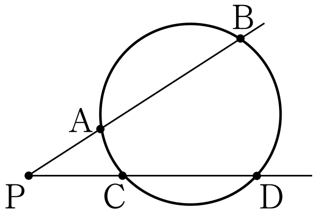
点 P と交点の距離の積は直線のとり方によらず一定値になる．



すなわち

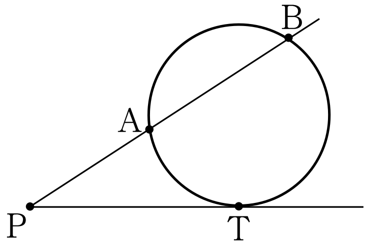
1 点 P を通る 2 直線が
円とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$



2 円外にある点 P を通る 2 直線が
円と 2 点 A，B で交わり，円と点 T で接するとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$



注 逆も成り立つ．

補 一定値となる積 PA・PB を「方べき」という．

考 1 $\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$ より $\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PD} : \mathrm{PB}$

よって $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$

2 $\triangle\mathrm{PAT} \backsim \triangle\mathrm{PTB}$ より $\mathrm{PA} : \mathrm{PT} = \mathrm{PT} : \mathrm{PB}$

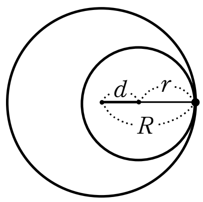
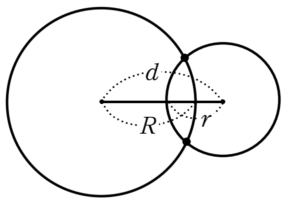
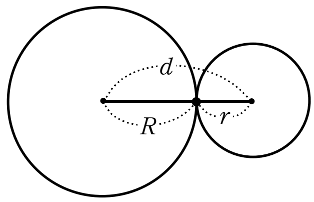
よって $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$

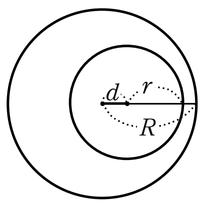
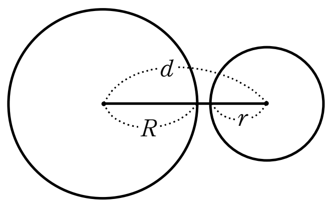
2 つの円の位置関係

平面上に 2 つの円がある．

中心間の距離を d，半径をそれぞれ R，r （$R > r$）として

2 つの円の位置関係は次のようになる．

d と R，r	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$
2 つの円の位置関係	内接する （共有点 1 個）	異なる 2 点で交わる （共有点 2 個）	外接する （共有点 1 個）
グラフ			

d と R，r	$d < R - r$	$d > R + r$
2 つの円の位置関係	内包する （共有点 0 個）	共有点をもたない （共有点 0 個）
グラフ		

$R = r$ のときも成り立つが「内接する」ことや「内包する」ことはない．

2 つの円が共有点をもつ条件は $R - r \leqq d \leqq R + r$

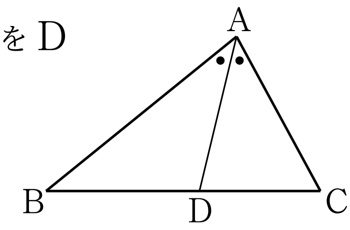
㊟補 2 つの円の位置関係は中心間の距離と 2 つの円の半径で決まる．

㊟補 2 つの円が接するとき，接点は 2 つの円の中心を結ぶ直線上にある．

☆三角形の内角の二等分線と線分の関係

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の内角の二等分線と対辺 BC との交点を D とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



考 $\triangle ABC$ の外接円と直線 AD の交点のうち A 以外の点を E とする．

内角の二等分線より $\angle BAE = \angle CAD$

$\overset{\frown}{AB}$ の円周角より $\angle ACB = \angle AEB$

2 角が等しいことから $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

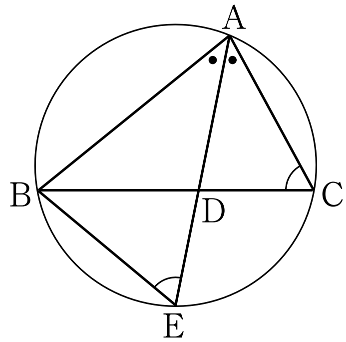
これより $AB : AE = AD : AC$

すなわち $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

$AE = AD + DE$ であるから

$$\begin{aligned} AB \cdot AC &= AD \cdot (AD + DE) \\ &= AD^2 + AD \cdot DE \\ &= AD^2 + BD \cdot DC \quad (\because \text{方べきの定理より } AD \cdot DE = BD \cdot DC) \end{aligned}$$

よって $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

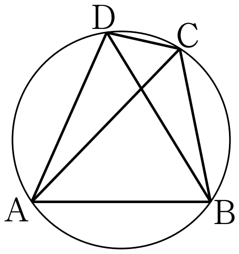


☆トレミーの定理（プトレマイオスの定理）

四角形 ABCD が円に内接するとき

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

つまり（向かい合う辺の積の和）=（対角線の積）



注 逆も成り立つ．

考（相似比を利用する）

線分 AC 上に $\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{EBA}=\alpha$ となる点 E をとる．

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角より $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BDC}$

2 角が等しいことから $\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{DBC}$

これより $\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$

すなわち $\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}$ ……①

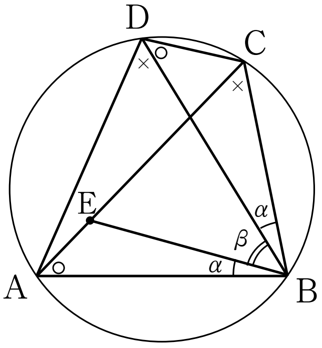
$\angle\mathrm{DBE}=\beta$ とおくと $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{CBE}=\alpha+\beta$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角より $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}$

2 角が等しいことから $\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{EBC}$

これより $\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$

すなわち $\mathrm{EC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$ ……②



これらのことから

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}&=(\mathrm{AE}+\mathrm{EC})\cdot\mathrm{BD}\ \left(\because \mathrm{AC}=\mathrm{AE}+\mathrm{EC}\right)\\&=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BD}+\mathrm{EC}\cdot\mathrm{BD}\\&=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}\ \left(\because ①,②\right)\end{aligned}$$