数学Ａ　場合の数と確率「確率」

事象と試行／ 全事象と根元事象／ 空事象／ 同様に確からしい／
確率の定義／ 確率の基本性質／ 積事象と和事象／ 排反事象／
確率の加法定理／ 和事象の確率／ 余事象／ 余事象の確率／
ド・モルガンの法則と確率／ 独立な試行／ 独立な試行の確率／ 反復試行／
反復試行の確率／ 条件付き確率／ 確率の乗法定理／ 期待値／

事象と試行

同じ条件のもとで何回も繰り返すことができ，

どの結果が起こるかが偶然に決まるような実験や観察などを **試行**（しこう） という．

また，試行の結果として起こる事柄（ことがら）を **事象**（じしょう） という．

㊒ 試行：1 個のサイコロを 1 回ふる
事象：1 の目が出る

全事象と根元事象

1 つの試行において，起こりうる結果全体を集合 U で表す．

U で表される事象を **全事象**（ぜんじしょう） という．

全事象は必ず起こる事象である．

この試行におけるどの事象も U の部分集合で表すことができる．

U の 1 個の要素だけからなる集合で表される事象を **根元事象**（こんげんじしょう） という．

㊒「1 個のさいころを 1 回ふる」という 1 つの試行において，起こりうる結果全体は

「1 の目が出る」，「2 の目が出る」，「3 の目が出る」，
「4 の目が出る」，「5 の目が出る」，「6 の目が出る」

という事象で，これを $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と表す．これが全事象である．
この U の部分集合を考えると，1 個の要素だけからなる集合で表される事象は

$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$

の 6 つで，これらが根元事象である．

空事象

すべての事象はいくつかの根元事象からなるが

根元事象を 1 つも含まないものも事象と考え，これを **空事象**（くうじしょう） といい

空集合 $\varnothing$ で表す．

同様に確からしい

ある試行において

起こり得るすべての結果がどれも同程度に起こると期待できるとき

これらの根元事象は 同様(どうよう)に確(たし)からしい という.

㊄ 1 個のさいころを 1 回ふる試行において，1，2，3，4，5，6 の目はどれも同程度に起こると期待できるので，これらの根元事象は同様に確からしい.
重心がかたよって 1 の目がやたら出やすいさいころの場合，同様に確からしくない.

確率の定義

ある試行において，起こり得るすべての結果が N 個あり，

各結果からなる根元事象は同様に確からしいとする.

この試行における全事象 U の根元事象の個数は $n(U)=N$

ここで，事象 A の根元事象の個数を $n(A)=a$ とするとき

事象 A の確率を $P(A)$ とかき

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{a}{N}$$

つまり

$$(\text{事象 } A \text{ の確率})=\frac{(\text{事象 } A \text{ の起こるすべての場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$$

と定める.

㊓ 確率を英語で Probability という.
㊄ 1 個のさいころを 1 回ふる」という 1 つの試行において，起こり得るすべての結果は
「1 の目が出る」，「2 の目が出る」，「3 の目が出る」，
「4 の目が出る」，「5 の目が出る」，「6 の目が出る」
という事象で，これらは同様に確からしいとする.
全事象は $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ でその個数は $n(U)=6$
このとき，奇数の目が出るという事象を A とすると $A=\{1, 3, 5\}$ でその個数は
$n(A)=3$
よって，奇数の目が出る確率は $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

㊟ 根元事象は同様に確からしく起こるとする．例えば，重心にかたよりがあり 1 の目がやたら出やすいさいころの場合，確率は定まらない.

補 大雑把な説明だが，確率を求めるときは
「起こりするすべての場合の数 N」と
そのうちで「確率を求める事象の起こる場合の数 a」を求め $\dfrac{a}{N}$ とすればよい．
ただし，N は同様に確からしく起こらなければならない．

例 赤玉 3 個，白玉 1 個が入った袋から 1 個の玉を取り出す試行で，赤玉を取り出す確率を求める．

〔誤答例〕

取り出すのは赤玉か白玉かの 2（通り）……①

そのうち，赤玉であるのは 1（通り）……②

よって，その確率は $\dfrac{②}{①}$ として $\dfrac{1}{2}$

これは ① が間違いで，赤玉の個数が多いので赤玉の方が取り出しやすい．

つまり，① は同様に確からしく起こらない．

同様に確からしく起こるには同じ赤玉でも区別して考える．

〔解答例〕

赤玉 3 個，白玉 1 個を「赤 1」「赤 2」「赤 3」「白」とすべて区別して，

1 個の玉の取り出し方は 4（通り）……③

これらは同様に確からしい．

そのうち，赤玉を取り出すのは「赤 1」「赤 2」「赤 3」の 3（通り）……④

よって，求める確率は $\dfrac{④}{③}$ として $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

注 確率ではなく場合の数で，1 個の玉の並べ方ならば ① の 2(通り) で正しい．

要

確率では同様に確からしく起こるため，同じものでも基本的に
すべてのものを区別して考える．

確率の基本性質

$\boxed{1}$ 任意の事象 A の確率は $0 \leqq P(A) \leqq 1$

$\boxed{2}$ 全事象 U の確率は $P(U) = 1$

$\boxed{3}$ 空事象 $\varnothing$ の確率は $P(\varnothing) = 0$

考 $\boxed{1}$ 全事象を U とすると

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$

各辺 $n(U)$ で割って

$$0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq \frac{n(U)}{n(U)}$$

よって $0 \leqq P(A) \leqq 1$ である．

$\boxed{2}$ $P(U) = \dfrac{n(U)}{n(U)} = 1$

$\boxed{3}$ $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(U)} = \dfrac{0}{n(U)} = 0$

積事象と和事象

2 つの事象 A，B において

$\boxed{1}$ A と B がともに起こる事象を A と B の 積事象（せきじしょう） といい $A \cap B$ で表す．

$\boxed{2}$ A または B が起こる事象を A と B の 和事象（わじしょう） といい $A \cup B$ で表す．

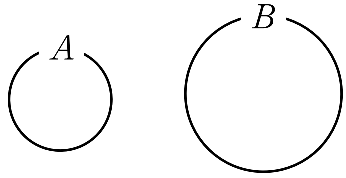
排反事象

2 つの事象 A と B が同時に起こることがないとき

A と B は 互(たが)いに排反(はいはん)である　または　A と B は 互(たが)いに排反事象(はいはんじしょう) である

という．

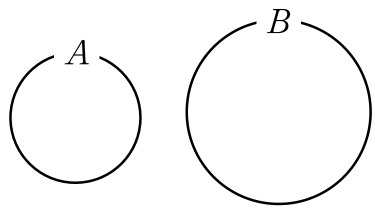
このとき　$A \cap B = \varnothing$



確率の加法定理

2 つの事象 A，B が排反，つまり $A \cap B = \varnothing$ のとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

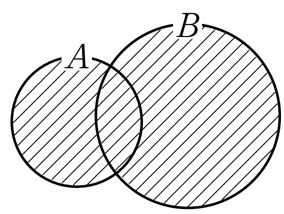


考
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A) + n(B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

和事象の確率

2 つの事象 A，B について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



考
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

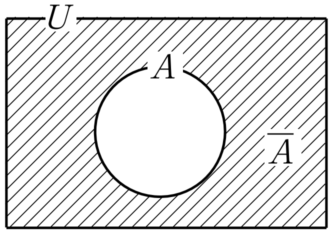
余事象

事象 A に対して

「A が起こらない」という事象を A の 余事象（よじしょう） といい $\overline{A}$ で表す.

余事象の確率

全事象を U とし，事象 A の余事象を $\overline{A}$ で表す.



$\boxed{1}$ $P(A)+P(\overline{A})=1$

$\boxed{2}$ $P(\overline{A})=1-P(A)$

㊟ $A\cup\overline{A}=U$ と $A\cap\overline{A}=\varnothing$ より $\boxed{\text{確率の加法定理}}$を考えて

$$P(U)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

$P(U)=1$ であるから $P(A)+P(\overline{A})=1$

ド・モルガンの法則と確率

全事象を U とし，2 つの事象 A，B について，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$\boxed{2}$ $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$

独立な試行

2 つの試行 S，T について

それぞれの結果の起こり方が互いに影響を与えないとき

試行 S と T は 独立(どくりつ) であるという.

㊟ 次の 2 つの試行 S と T は独立である.

S：1 個のさいころをふる

T：1 枚のコインを投げる

なぜなら，サイコロの目の出方がコインの表，裏の出方にまったく影響を与えない.

コインの表，裏の出方も，サイコロの目の出方にまったく影響を与えない.

独立な試行の確率

2 つの試行 S と T が独立であるとき

試行 S で事象 A が起こる　かつ　試行 T で事象 B が起こる確率は

$$P(A)\times P(B)$$

3 つ以上の独立な試行についても，上と同様のことが成り立つ.

例 次の 2 つの試行 S と T は独立である.

S：1 個のサイコロを投げる

T：1 枚のコインを投げる

S において事象 A を「1 の目が出る」，T において事象 B を「表が出る」とすると

A かつ B が起こる確率は

$$P(A)\times \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

例 1 個のさいころを 2 回続けてふるとき，さいころをふる各回の試行は独立である.

1 個のさいころを 2 回続けてふるとき，1 回目に 1 の目が出て，2 回目に 3 以下の目が出る確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

反復試行

同じ条件のもとで同じ試行を繰り返し行うとする．

それらの試行が独立であるとき，これらの試行をまとめて 反復試行（はんぷくしこう）という．

㋹ 1 つのサイコロを続けて 3 回ふるという試行は反復試行である．

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．

この試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

㋹ 1 つのサイコロを続けて 3 回ふるという試行において

1 の目がちょうど 1 回だけ出る確率を求める．

1 つのサイコロを 1 回ふって 1 の目が出る事象を A とすると

$P(A)=\dfrac{1}{6}$，$P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

1 つのサイコロを続けて 3 回投げて，A が 1 回，$\overline{A}$ が 2 回起こるので

1 回目，2 回目，3 回目の事象が

「A，$\overline{A}$，$\overline{A}$」または「$\overline{A}$，A，$\overline{A}$」または「$\overline{A}$，$\overline{A}$，A」

であり，これらは排反であるから

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}={}_3\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$$

要

反復試行の確率 は

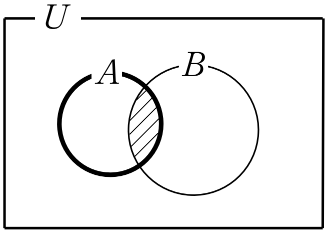
1 回ごとの確率を求め，それが何回起こるか，何回目に起こるかを考える

条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B の起こる確率を

事象 A が起こったときの事象 B の起こる **条件(じょうけん)付(つ)き確率** といい

$P_A(B)$ で表す.



この確率は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ただし $n(A) \neq 0$，$P(A) \neq 0$

考 $P_A(B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\dfrac{n(A)}{n(U)}} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

例 1 個のさいころを 1 回ふる試行において

A：奇数の目が出る

B：素数の目が出る

としたとき，目の出方全体の事象を U とすると

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

これより $n(U) = 6$，$n(A) = 3$，$n(B) = 3$

$A \cap B = \{3, 5\}$ であるから $n(A \cap B) = 2$

このとき，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}$$

これは

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6},\ P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{2}{6}$$

であることから

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

とすることもできる.

また，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{n(B \cap A)}{n(B)} = \frac{2}{3}$$

確率の乗法定理

2 つの事象 A，B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

ただし A が空事象のときは $P(A\cap B)=0$

例 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじを，A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く．
ただし，引いたくじはもとに戻さないとする．
このとき，A，B の 2 人とも当たる確率を求める．

A が当たりくじを引くという事象を A
B が当たりくじを引くという事象を B

とすると，A，B の 2 人とも当たる事象は $A\cap B$ である．
A が当たりくじを引く確率は $P(A)=\dfrac{3}{10}$
A が当たりくじを引いた条件のもとで B がくじを引くとき，
当たりくじ 2 本を含む 9 本のくじの状態でくじを引くことから $P_A(B)=\dfrac{2}{9}$
よって $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$
これは 2 人のくじの引き方全体を U とすると $n(U)=10\cdot 9$
A，B の 2 人とも当たりくじを引くのは $n(A\cap B)=3\cdot 2$
このことから $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(U)}=\dfrac{3\cdot 2}{10\cdot 9}=\dfrac{1}{15}$ として求めることもできる．

期待値

ある試行の結果に応じて決まる数量 X の各々の値と確率をかけて，

すべてたした値を X の期待値（きたいち）といい $E(X)$ または E などと表す．

すなわち，右の表のように数量 X が

x_1，x_2，$\cdots$，x_n の値のどれか一つの値をとるとし，

各値のとる確率が p_1．p_2，$\cdots$，p_n

ただし $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

として，X の期待値は

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

補 期待値を意味する英語は Expected value

注 変量 X は小文字 x で表すこともある．

補 「期待値」は「平均」ともいい，大雑把に言うと「確率で求める平均値」のこと．

例 3 人のテストの点数が 50 点，50 点，80 点とするとき，点数の平均値は

$$\frac{\text{点数の合計点}}{\text{人数}} = \frac{50 \times 2 + 80}{3} = 60\ (\text{点})$$

これを確率で求めると，50 点が 3 人中 2 人，80 点が 3 人中 1 人なので，

右の表（確率は相対度数）のようになり，点数の期待値は

$$50 \cdot \frac{2}{3} + 80 \cdot \frac{1}{3} = 60\ (\text{点})$$

点数	50	80	計
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

例題　1 つのさいころを 1 回振るとき，出る目の値の期待値を求めよ．

解 1 つのさいころを 1 回振るとき，出る目の値の期待値を E とする．

出る目の値と確率の関係は次の表のようになる．

目の数	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \\ &= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

補 双六（すごろく）で 1 回あたり 3.5 マス進めるようなイメージ．