数学A　場合の数と確率「場合の数」

有限集合と無限集合 / 有限集合の要素の個数 /
2 つの集合の和集合の要素の個数 / ★ 3 つの集合の和集合の要素の個数 /
補集合の要素の個数 / ド・モルガンの法則と集合の要素の個数 / 場合の数 /
和の法則 / 積の法則 / 数え上げの原則 / 階乗 / 階乗の変形 / 順列 /
${}_n\mathrm{P}_r$ の計算 / 円順列 / 円順列の総数 / ★数珠順列 / ★数珠順列の総数 /
重複順列 / 重複順列の総数 / 組合せ / ${}_n\mathrm{C}_r$ の計算 / ☆ ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質 /
☆組合せの関係式 / 同じものを含む 2 個の順列 /
同じものを含む 3 個の順列 / 同じものを含む順列 /
平面での最短経路の総数 / 区別があるものの区別のない組への組分け /
区別があるものの区別のある組への組分け / ★重複組合せ /
★重複組合せの総数 / ★区別がないものの区別のある組への組分け /

有限集合と無限集合

$\boxed{1}$ 要素の個数が有限である集合を 有限集合（ゆうげんしゅうごう） という.

$\boxed{2}$ 要素の個数が無限にある集合を 無限集合（むげんしゅうごう） という.

例 $\boxed{1}$ $\{x \mid x$ は 3 以下の自然数 $\} = \{1, 2, 3\}$ は要素が 3 個で有限なので有限集合である.

$\boxed{2}$ $\{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ は要素が無限にあるので無限集合である.

有限集合の要素の個数

有限集合の要素の個数を $n(A)$ と表す.

とくに 空集合 $\varnothing$ は要素をもたないから $n(\varnothing) = 0$

例 $A = \{x \mid x$ は 3 以下の自然数 $\} = \{1, 2, 3\}$ は要素が 3 個なので，$n(A) = 3$

2 つの集合の和集合の要素の個数

有限集合 A，B に対し

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

とくに $A \cap B = \varnothing$ のときは

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

★３つの集合の和集合の要素の個数

有限集合 A，B，C に対し

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

補集合の要素の個数

全体集合 U とその部分集合 A に対し

$\boxed{1}$ $n(A)+n(\overline{A})=n(U)$

$\boxed{2}$ $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

ド・モルガンの法則と集合の要素の個数

全体集合 U とその部分集合 A，B に対し

$\boxed{1}$ $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$\boxed{2}$ $n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$

場合の数

ある事柄(ことがら)について，起こりうるすべての場合の総数を **場合(ばあい)の数(かず)** という．

和の法則

2 つの事柄 A と B について，これらは同時に起こらないとする．

A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りあるとき

A または B の起こる場合の数は $a+b$ 通り

これを **和(わ)の法則(ほうそく)** という．

この法則は 3 つ以上の事柄についても同じように成り立つ．

要

基本的に 「または」の結び，場合分けは **たし算**

積の法則

2 つの事柄 A と B について

A の起こり方が a 通りあり，その各々（おのおの）の起こり方に対して

B の起こり方が b 通り あるとき

A，B がともに起こる場合の数は $a \times b$ 通り

これを **積の法則**（せきのほうそく） という．

この法則は 3 つ以上の事柄についても同じように成り立つ．

要

基本的に「かつ」の結び，連続操作 は **かけ算**

数え上げの原則

場合の数を求めるとき，次のような原則がある．

1. 樹形図や表などを活用し，規則的に配列するなど工夫して数える
2. ある原則を決め，その原則にしたがって整理して考える
3. 条件の強い所から考えて積の法則を利用する
4. 一度に数えきれないときは，場合分けをして和の法則を利用する
5. 直接数えるのが大変なときは，それ以外を考えて全体から引く

階乗

1 から n までの自然数の積を n の階乗(かいじょう)といい $n!$ と表す.

つまり $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

また 特別な場合として $0!=1$ と定める.

例
$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2\cdot 1 = 2$
$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$
$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$
$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$
$8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40320$
$9! = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 362880$
$10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 3628800$

階乗の変形

$\boxed{1}$ n を自然数とするとき

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

$\boxed{2}$ n を 2 以上の自然数とするとき

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$$

例 $\boxed{1}$ $5! = 5\cdot 4!$
$\boxed{2}$ $5! = 5\cdot 4\cdot 3!$

順列

いくつかのものを順序(じゅんじょ)を考えに入れて 1 列に並べたものを **順列**(じゅんれつ) という.

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を

n 個から r 個取る順列 といい，その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と表す.

㊟補 ${}_n\mathrm{P}_r$ の P は順列を意味する Permutation の頭文字である.

${}_n\mathrm{P}_r$ の計算

n を自然数，r を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個}} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

とくに

$r=n$ のとき ${}_n\mathrm{P}_n = n!$

$r=0$ のとき ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$

㊎例 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{3\text{ 個}} = \dfrac{7!}{4!} = 210$

円順列

いくつかのものを順序を考えに入れて円形に並べたものを **円順列**（えんじゅんれつ）という.
回転して同じになるものは同じ並べ方とみなす.

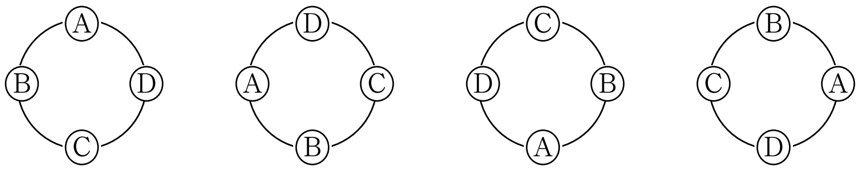
円順列の総数

異なる n 個の円順列の総数は

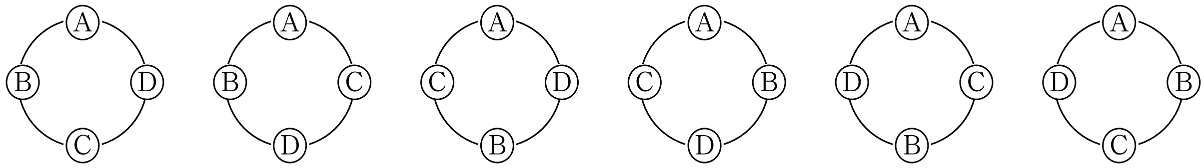
$$(n-1)!$$

㊄ 1 個を固定して残り $(n-1)$ 個を並べることを考える.

㊞ A，B，C，D の 4 人を円形に並べる総数について
次のような場合は回転すると同じになることに注意する.



そこで A を固定して残り B，C，D の 3 人を並べると次のようになる.



これらは回転しても同じにならないので円順列の総数になる.
よって 4 人のうち 1 人を固定して残り 3 人を並べることから

$(4-1)! = 3! = 6$（通り）

★数珠順列

いくつかのものを順序を考えに入れて数珠（じゅず）形に並べたものを

数珠順列（じゅずじゅんれつ）という．

回転，あるいは表裏をかえて同じになるものは同じ並べ方とみなす．

㊋ 数珠はペンダントやネックレスでも同じ．

★数珠順列の総数

異なる n 個の数珠順列の総数は

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

㊫ まず円順列を考え，線対称になるものは表裏をかえると同じになるので 2 でわる．

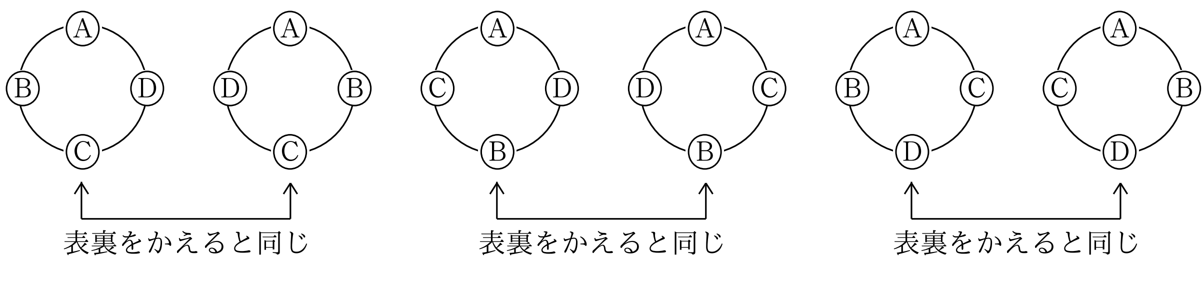
㊕ A，B，C，D の 4 個を数珠形に並べる総数について

まず A を固定して円形に並べると，下のように $(4-1)!=3!=6$（通り）

左の 2 つは Ⓐ と Ⓒ を結ぶ直線に関して対称だから表裏をかえると同じ並べ方になる．

そのように 2 組ずつ同じ並べ方になる．

よって $\dfrac{(4-1)!}{2}=3$（通り）



重複順列

異なる n 個のものから，繰り返し用いることを許して

r 個を取って並べる順列を，n 個から r 個取る**重複順列**（ちょうふくじゅんれつ）という．

重複順列の総数

異なる n 個から r 個取る重複順列の総数は

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{ 個}}=n^r$$

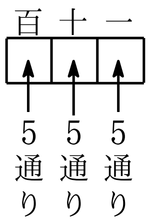
例 異なる 5 個から 3 個とる重複順列の総数は

$$\underbrace{5\times5\times5}_{3\text{ 個}}=5^3=125$$

例 1，2，3，4，5 の 5 個の数字から重複を許して 3 個の数字を取り出してつくられる 3 桁の整数の個数を求める．

百の位，十の位，一の位それぞれ 5 通りの決め方があるで

$$5\times5\times5=5^3=125\ (\text{個})$$



組合せ

いくつかのものを順序（じゅんじょ）を考えに入れないで取り出して1組にしたものを**組合せ**（くみあわせ）という．

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せを

n 個から r 個取る組合せといい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す．

㊓ ${}_n\mathrm{C}_r$ の C は組合せを意味する Combination の頭文字である．

${}_n\mathrm{C}_r$ の計算

n を自然数，r を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r!}\\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&= \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}
\end{aligned}
$$

とくに

$r=n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_n = 1$

$r=0$ のとき　${}_n\mathrm{C}_0 = 1$

㊒ ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{7\cdot 6\cdot 5}^{3\text{ 個}}}{3!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{{}_7\mathrm{P}_3}{3!} = 35$

㊔ 異なる n 個のものから異なる r 個取り出し，その r 個を1列に並べる総数を考えて

$${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$$

☆ ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

$\boxed{1}$ n を自然数，r を $0 \leqq r \leqq n$ となる整数とするとき

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

$\boxed{2}$ n を 2 以上の自然数，r を $1 \leqq r \leqq n-1$ となる整数とするとき

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

例 $\boxed{1}$ ${}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2$

$\boxed{2}$ ${}_7\mathrm{C}_2 = {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2$

考 $\boxed{1}$ 異なる n 個のものから異なる r 個を取り出すことと

取り出さない異なる $(n-r)$ 個を選ぶ場合の数は同じである．

$\boxed{2}$ 異なる n 個のものから異なる r 個を取り出す方法は ${}_n\mathrm{C}_r$（通り）

これを特定の 1 個を含むか含まないかで場合分けして

あ 特定の 1 個を含む場合は 異なる $(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個を選ぶから

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$（通り）

い 特定の 1 個を含まない場合は 異なる $n-1$ 個から r 個を選ぶから

${}_{n-1}\mathrm{C}_r$（通り）

よって あ または い より ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$

考 $\boxed{2}$

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} &= \frac{n\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{\{r+(n-r)\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{r\cdot(n-1)!}{r\cdot(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!(n-r)\cdot(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
&= {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

☆組合せの関係式

n，k を自然数，$1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

例 $3 \cdot {}_7\mathrm{C}_3 = 7 \cdot {}_6\mathrm{C}_2$

考 n 人から k 人選び，代表者を 1 人決める方法は

$${}_n\mathrm{C}_k \times {}_k\mathrm{C}_1 = k\,{}_n\mathrm{C}_k \text{（通り）} \cdots\cdots ①$$

n 人から 1 人の代表者を決めて，$(n-1)$ 人から $(k-1)$ 人を選ぶ方法は

$${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{（通り）} \cdots\cdots ②$$

① ＝ ② であるから　$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

考
$$\begin{aligned} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \end{aligned}$$

同じものを含む2個の順列

$\underbrace{\mathrm{AA\cdots A}}_{p\text{ 個}}\ \underbrace{\mathrm{BB\cdots B}}_{q\text{ 個}}$ の $(p+q)$ 個の順列の総数は

$$_{p+q}\mathrm{C}_p = {}_{p+q}\mathrm{C}_q = \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

考 $(p+q)$ 個の場所を設定し，p 個を選んで A を並べ，残りに q 個の B を並べる．
あるいは，q 個を選んで B を並べ，残りに p 個の A を並べる．
また，$(p+q)$ 個 をすべて異なるとして並べ，p 個と q 個の同じものの重複を考えて $p!q!$ でわる．

例 $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\text{ 個}}\ \underbrace{\mathrm{BB}}_{2\text{ 個}}$ の 5 個の順列の総数は

右図のように 5 個を並べる場所を設定し，
5 個から 3 個選んで 3 つの A を並べ，
残り 2 個に 2 つの B を並べることを考えて

$$_5\mathrm{C}_3 = \frac{5!}{3!2!} = 10\text{（通り）}$$

別 5 個から 2 個選んで 2 つの B を並べ，
残り 3 個に 3 つの A を並べることを考えて

$$_5\mathrm{C}_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10\text{（通り）}$$

5 個

5 個から 3 個選んで A を並べる

A		A	A	

残り 2 個に B を並べる

A	B	A	A	B

5 個から 2 個選んで B を並べる

	B			B

残り 3 個に A を並べる

A	B	A	A	B

別 3 つの A，2 つの B を区別して A_1，A_2，A_3，B_1，B_2 の 5 個を並べると

$$5! = 120\text{（通り）}$$

そのうち，例えば，B_1，B_2 を入れかえた $2!$（通り）の

$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$

について，どちらも ABAAB と同じ並べ方になる．
また，例えば，A_1，A_2，A_3 を入れかえた $3!$（通り）の

$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$
$\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$

について，いずれもいずれも ABAAB と同じ並べ方になる．
よって，$2! \times 3!$（通り）は重複するので

$$\frac{5!}{3!2!} = 10\text{（通り）}$$

補 10（通り）は次になる

AAABB
AABAB
AABBA
ABAAB
ABABA
ABBAA
BAAAB
BAABA
BABAA
BBAAA

同じものを含む3個の順列

$\underbrace{\mathrm{AA\cdots A}}_{p\text{個}}\underbrace{\mathrm{BB\cdots B}}_{q\text{個}}\underbrace{\mathrm{CC\cdots C}}_{r\text{個}}$ の $(p+q+r)$ 個の順列の総数は

$$_{p+q+r}\mathrm{C}_p\cdot{}_{q+r}\mathrm{C}_q=\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

考 $(p+q+r)$ 個の場所を設定し，p 個を選んで A を並べ，残りの $(p+r)$ 個から q 個を選んで B を並べ，残った r 個には C を並べる．
また，$(p+q+r)$ 個 をすべて異なるとして並べ，p 個と q 個と r 個の同じものの重複を考えて $p!q!r!$ でわる．

例 $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\text{個}}\underbrace{\mathrm{BB}}_{2\text{個}}\underbrace{\mathrm{CC}}_{2\text{個}}$ の 7 個の順列の総数は $_7\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$（通り）

同じものを含む順列

同じものを含む順列の総数は次の手順で求めることができる．

$\boxed{1}$ 全部異なるものとして順列の総数 N を求める

$\boxed{2}$ N を同じものの個数の階乗で割る

例 $\underbrace{\mathrm{AAA}}_{3\text{個}}\underbrace{\mathrm{BB}}_{2\text{個}}\underbrace{\mathrm{CCCC}}_{4\text{個}}\mathrm{D}$ の 10 個の順列の総数を求める．

$\boxed{1}$ 10 個すべて異なるとして順列の総数を N とすると

$N=10!$

$\boxed{2}$ 3 個と 2 個と 4 個の同じものの重複を考えて

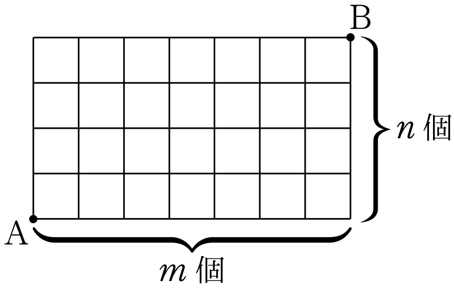
$\dfrac{N}{3!2!4!}=\dfrac{10!}{3!2!4!}=12600$（通り）

平面での最短経路の総数

右図のように $m \times n$ 個のマス目の道があるとき

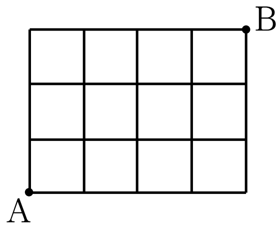
地点 A から地点 B への最短経路（さいたんけいろ）の総数は

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = {}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_{m+n}\mathrm{C}_n$$

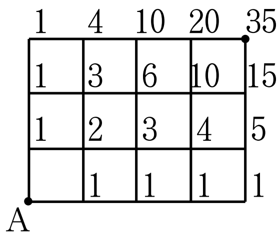


㋕ $\underbrace{xx\cdots\cdots x}_{m\text{ 個}}\underbrace{yy\cdots y}_{n\text{ 個}}$ の $(m+n)$ 個の文字の順列として考える.

㊑ 地点 A から地点 B への最短距離で行く道順は
右に 4 回上に 3 回移動することより $\underbrace{xxxx}_{4\text{ 個}}\underbrace{yyy}_{3\text{ 個}}$ の
7 個の文字の順列に経路が対応する.
よって ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7!}{4!3!} = \mathbf{35}$（通り）



別 場合の数を頂点の右上に直接書き込むと右のようになる.
よって **35**（通り）



区別があるものの区別のない組への組分け

区別があるものの区別のない組への組分けの総数は

基本的に次のような手順で求めることができる．

$\boxed{1}$ 組に区別があるとして組分けの総数 N を求める

$\boxed{2}$ N を組に区別がないと同じ組分けになる組数の階乗で割る

㊕ 同じものを含む順列と同じように考える．
組に区別があるとして組み分けをして，重複する組を考える．

㊐ 6個の異なるものを2個，2個，2個の3組に分ける総数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{3!} = \frac{90}{6} = 15\ (\text{通り})$$

㊐ $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ の6人を $\underbrace{2\text{人},\ 2\text{人},\ 2\text{人}}_{3\text{組}}$ の3組に分ける総数について

$\boxed{1}$ 3つの組をA組，B組，C組と区別したときの組み分けの総数を N とすると

A組は6人から2人を選んで ${}_6\mathrm{C}_2$（通り）

B組はA組以外の4人から2人を選んで ${}_4\mathrm{C}_2$（通り）

C組は残りの2人を選んで ${}_2\mathrm{C}_2$（通り）

これより　$N = {}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 = 15 \cdot 6 = 90$（通り）

$\boxed{2}$ N のうちA組，B組，C組を入れかえた $3!$（通り）の

A組	B組	C組
$a,\ b$	$c,\ d$	$e,\ f$
$a,\ b$	$e,\ f$	$c,\ d$
$c,\ d$	$a,\ b$	$e,\ f$
$c,\ d$	$e,\ f$	$a,\ b$
$e,\ f$	$a,\ b$	$c,\ d$
$e,\ f$	$c,\ d$	$a,\ b$

について，いずれも $\{a,\ b\}$，$\{c,\ d\}$，$\{e,\ f\}$ の同じ組み分けになる．

よって，$3!$（通り）は重複するので

$$\frac{N}{3!} = \frac{90}{6} = 15\ (\text{通り})$$

区別があるものの区別のある組への組分け

区別がある m 個のものを区別のある n 組への組分けの総数は

何もない組があってもよいならば

$$n^m$$

例 異なる 6 個のものを 3 つの組 A，B，C に分ける方法は

1 個につき 3(通り) の分け方があるので

$3^6 = 729$ (通り)

★重複組合せ

異なる n 個のものから，繰り返し用いることを許して r 個選ぶことを

n 個から r 個選ぶ **重複組合せ**（ちょうふくくみあわ）という．

★重複組合せの総数

異なる n 個から r 個選ぶ重複組合せの総数は

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

これは $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{r\text{ 個}}$, $\underbrace{|\,|\cdots|}_{(n-1)\text{ 個}}$ の順列の総数に等しい．

㊀例 $\{A, B, C, D\}$ の 4 個から 2 個選ぶ重複組合せの総数は

$${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10 \text{（通り）}$$

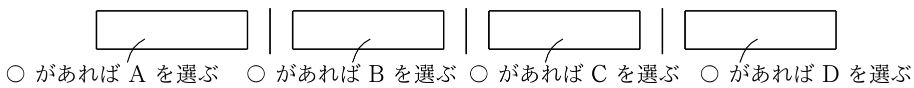
すべて書き出すと

$\{A, A\}$, $\{B, B\}$, $\{C, C\}$, $\{D, D\}$, $\{A, B\}$
$\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$

よって 10（通り）

これは $\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{2\text{ 個}}$, $\underbrace{|\,|\,|}_{3\text{ 個}}$ の順列の総数に等しい．

なぜなら，「｜」を仕切りとみて，3 つの仕切りで分けられた 4 つの部分を左から順に A，B，C，D を選ぶ部分と考える．○の数だけ選ぶ，○がないときは選ばないとする．



選ぶもの	並べたもの
$\{A, A\}$	○○｜｜｜
$\{B, B\}$	｜○○｜｜
$\{C, C\}$	｜｜○○｜
$\{D, D\}$	｜｜｜○○
$\{A, B\}$	○｜○｜｜
$\{A, C\}$	○｜｜○｜
$\{A, D\}$	○｜｜｜○
$\{B, C\}$	｜○｜○｜
$\{B, D\}$	｜○｜｜○
$\{C, D\}$	｜｜○｜○

★区別がないものの区別のある組への組分け

区別のない m 個のものを区別のある n 組への組分けの総数は

$\boxed{1}$ 何もない組があってよいとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m\ (x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \cdots,\ x_n \geqq 0)$$

を満たす 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の組数に等しい．

すなわち ${}_n\mathrm{H}_m = {}_{n+m-1}\mathrm{C}_{n-1}$

$\boxed{2}$ 何もない組があってはいけないとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m\ (x_1 \geqq 1,\ x_2 \geqq 1,\ \cdots,\ x_n \geqq 1)$$

を満たす 整数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の組数に等しい．

すなわち ${}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$

考 $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{m\text{ 個}}$，$\underbrace{|\,|\cdots|}_{n-1\text{ 個}}$ の順列で，| で分けられた○の数を x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対応することを考える．

例 6 つの球を 3 人で分ける総数について

$\boxed{1}$ 何も分けられない人がいてもよいとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ x，y，z として

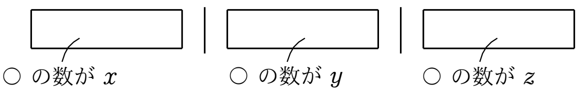
$$x + y + z = 6\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数に等しい．

これは 3 個のものから重複して 6 個選ぶ重複組み合せ，

つまり，$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{6\text{ 個}}$，$\underbrace{|\,|}_{2\text{ 個}}$ の順列より

$${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = 28\ (\text{通り})$$



$\boxed{2}$ 何も分けられない人がいないとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ x，y，z として

$$x + y + z = 6\ (x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1)$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の組数に等しい．

これは 6 個の○の間 $\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc$ の 5 か所の $_\wedge$ のうち 2 か所に | を入れる順列より

$${}_5\mathrm{C}_2 = 10\ (\text{通り})$$