数学 III　積分法の応用

教科書の「面積」「体積」「曲線の長さ」「速度と道のり」[微分方程式」をまとめています．

無限小

関数 $y=f(x)$ の導関数について

$$\mathit{\Delta} y = f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)$$

として

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x} = \frac{dy}{dx}$$

この dy，dx をそれぞれ一つの小さな数として扱い **無限小** という．

㊟ この無限小を認める人，認めない人の両方がいて，使うのは危険かもしれない．
もし認めたら，面積の話で出てくる $\mathit{\Delta} S = f(x)\mathit{\Delta} x$ は $dS = f(x)dx$ と書ける．
認めなければ dy, dx は数として扱えないので $dS = f(x)dx$ と書けない．

㊗ 個人的には，高校の数学はそもそも欠陥だらけで誤魔化している部分が沢山あるし，
変形や立式が便利なので，無限小を認めてよいと思っている．
しかし，ものすごく小さい数の世界では，厳密にはおかしいという意見もあり，使うのは気がひける．
だから，自分は無限小はなるべく使わず，使うときは dy, dx ではなく，$\mathit{\Delta} y$, $\mathit{\Delta} x$ を数として，さりげなく扱うことにしている．
この先出てくる $\mathit{\Delta} y$，$\mathit{\Delta} x$ はそれぞれ dy，dx とみなすとイメージがわくと思われる．

定積分と面積 Ⅰ

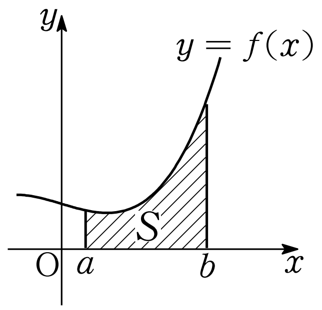
座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ とする．

曲線 $y=f(x)$ と $y=0$（x 軸）

および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

$$S=\int_a^b y\,dx \quad \text{または} \quad S=\int_a^b f(x)\,dx$$



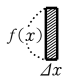
㊫ 厳密な証明は数学 Ⅲ

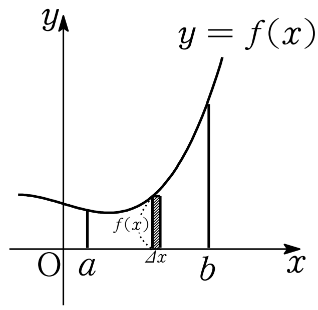
㊭ 大雑把な説明を書いておく．

$\int \fallingdotseq S \fallingdotseq \sum$ は「Sum(たし合わせる)」を意味する．

微小面積を $\varDelta S$ とすると

微小な世界では曲がった線も直線にみなせるので長方形の面積より

$\varDelta S=$  $=f(x)\cdot\varDelta x$



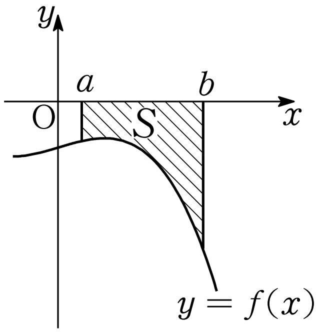
$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

定積分と面積 Ⅱ

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ とする．

曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$ (x 軸) および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

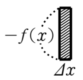


$$S = \int_a^b (-y)\,dx = -\int_a^b y\,dx$$

または

$$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

㊀考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $-f(x)$ の長方形なので

$\varDelta S =$ 

$= -f(x) \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

㊀補 $S = -\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ と $y = 0$ (x 軸) および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積の (-1) 倍

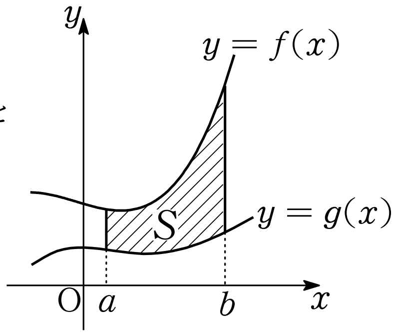
定積分と面積 Ⅲ

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする．

曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

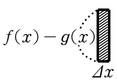


$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

つまり $(\text{面積})=\displaystyle\int_a^b \{(\text{上の関数})-(\text{下の関数})\}\,dx$

㊫ x 軸は関数 $y=0$ なので，$\boxed{\text{定積分と面積 Ⅰ}}$，$\boxed{\text{定積分と面積 Ⅱ}}$ の面積も立式できる．

㊕ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $f(x)-g(x)$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\{f(x)-g(x)\}\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

㊫ $S=\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$ は $y=f(x)-g(x)$ と $y=0$（x 軸）および
2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

定積分と面積 Ⅳ

座標平面において

連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$（x 軸）および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

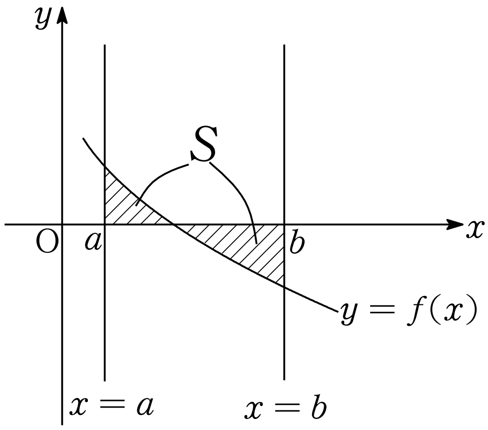
$$S=\int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_a^b$（関数の絶対値）dx

とくに $a \leqq x \leqq b$ において

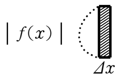
$f(x)$ の正負が変わらないとき

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right| dx=\left|\int_a^b \{f(x)\}\, dx\right|$$



補 面積 S は $f(x) \geqq 0$ の部分と $f(x) \leqq 0$ の部分の面積をそれぞれ求めてたし合わせることで求まるが，絶対値を用いると 1 つの定積分で表せる．

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x) \leqq 0) \end{cases}$ の長方形なので

$\varDelta S=$ 

$=\left|f(x)\right| \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

補 $S=\displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| dx$ は $y=\left|f(x)\right|$ と $y=0$（x 軸）および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

補 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ の正負が変わらない」とは

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」のこと．

なお，

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」の場合は 定積分と面積 Ⅰ

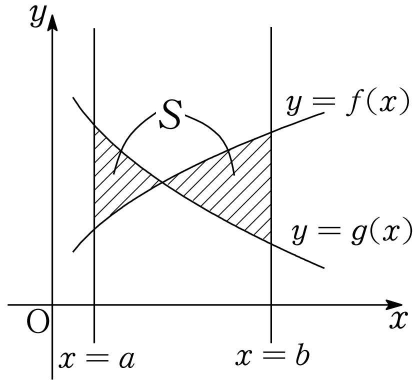
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」の場合は 定積分と面積 Ⅱ

定積分と面積 V

$a < b$ とする．座標平面において，

曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると



$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

つまり（面積）$= \displaystyle\int_a^b$（関数の差の絶対値）dx

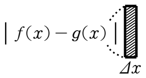
とくに $a \leqq x \leqq b$ において

$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらないとき

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx = \left| \int_a^b \{ f(x) - g(x) \} \, dx \right|$$

補 面積 S は $f(x) \geqq g(x)$ の部分と $f(x) \leqq g(x)$ の部分の面積をそれぞれ求めて
たし合わせることで求まるが，絶対値を用いると 1 つの定積分で表せる．

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left| f(x) - g(x) \right|$ の長方形なので

$\varDelta S =$ 

$= \left| f(x) - g(x) \right| \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

補 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない」とは
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq g(x)$」のこと．
この場合，絶対値記号を外に出せるので，面積公式を作ることができる．

補 $S = \displaystyle\int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$ は $y = \left| f(x) - g(x) \right|$ と $y = 0$（x 軸）および 2 直線
$x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

補 $y = g(x)$ が $y = 0$（x 軸）の場合は 定積分と面積 Ⅲ

補 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ の正負が変わらない」とは
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」のこと．
なお，
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$」の場合は 定積分と面積 Ⅲ

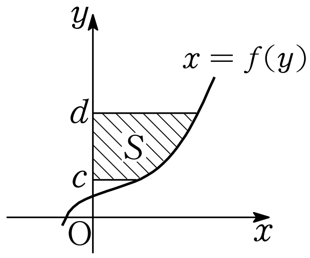
定積分と面積 Ⅵ

座標平面において，区間 $c \leqq x \leqq d$ で $f(y) \geqq 0$ とする．

連続な曲線 $x = f(y)$ と $x = 0$ (y 軸)

および 2 直線 $y = c, y = d$ で囲まれた図形の面積を

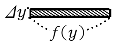
S とすると



$$S = \int_c^d x\,dy \quad \text{または} \quad S = \int_c^d f(y)\,dy$$

㊚ $\boxed{\text{定積分と面積 Ⅰ}}$ の x と y を入れ替えて考えるだけ．

㊕ 微小面積 ΔS は底辺 $f(y)$，高さ Δy の長方形なので

$\Delta S =$  $= f(y) \cdot \Delta y$

ΔS を c から d まで求積して (たし合わせて) 面積は求まる．

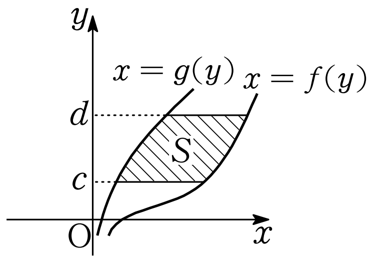
定積分と面積 Ⅶ

座標平面において，区間 $c \leqq x \leqq d$ で $f(y) \geqq g(y)$ とする．

2 つの連続な曲線 $x=f(y)$ と $x=g(y)$

および 2 直線 $y=c,\ y=d$ で囲まれた図形の面積を

S とすると



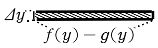
$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}\,dy$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_c^d \{($右の関数$)-($左の関数$)\}\,dy$

補 $\boxed{\text{定積分と面積 Ⅲ}}$ の x と y を入れ替えて考えるだけ．

補 y 軸は関数 $x=0$ なので，$\boxed{\text{定積分と面積 Ⅵ}}$ の面積も立式できる．

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $f(y)-g(y)$，高さ $\varDelta y$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\{f(y)-g(y)\}\cdot\varDelta y$

$\varDelta S$ を c から d まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

補 $S=\displaystyle\int_c^d \{f(y)-g(y)\}\,dx$ は $x=\left|f(y)-g(y)\right|$ と $x=0$（y 軸）および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた図形の面積に等しい．

媒介変数で表された曲線の面積

座標平面の媒介変数 t で表された連続な曲線

$$C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

について，C が境界となる面積を考えるときは置換積分法から求めることができる.

これは曲線 C の形により立式が変わる.

例えば

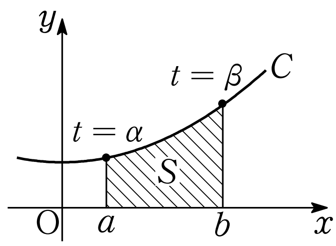
$\alpha \leqq t \leqq \beta$ となる区間で

$y \geqq 0$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$，　$f(\alpha)=a$，$f(\beta)=b$ ならば

曲線 C と $y=0$（x 軸）

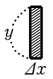
および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると



$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta y\,\frac{dx}{dt}dt=\int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)dt$$

㊂上では 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ y の長方形なので

$\varDelta S=$  $=y\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる.

㊟ $\dfrac{dx}{dt}$ の正負が変わるときは，y が x の関数の形にならないので，

曲線 C の概形を調べ．媒介変数の区間ごとに $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$\cdots$ のように関数で無理やり表して，面積を定積分で表す.

そして，変数 x を媒介変数 t の積分に置換積分をするとよい.

置換積分すると 1 つの定積分で表せることが知られている.

定積分と体積

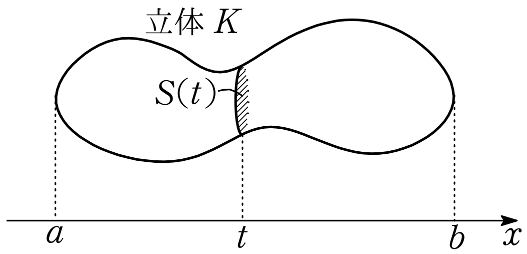
座標空間にある立体 K の体積を V とする．

立体 K が $a \leqq x \leqq b$ に存在し

平面 $x=t$ $(a \leqq t \leqq b)$ における

断面積が $S(t)$ のとき

$$V=\int_a^b S(t)\,dt$$



参 定積分と面積 Ⅰ と同じ考え方

考 平面 $x=a$ と平面 $x=t$ の間にある立体 K の体積を $V(t)$ $(t \geqq 0)$ とすると

$V=V(b)-V(a)$

あ $\Delta t>0$ のとき

$t \leqq x \leqq t+\Delta t$ における立体 K の体積は $V(t+\Delta t)-V(t)$

$t \leqq x \leqq t+\Delta t$ において，x 軸に垂直は平面での立体 K の断面積の

最大値を M，最小値を m とすると

$$m\,\Delta t \leqq V(t+\Delta t)-V(t) \leqq M\,\Delta t$$

各辺 Δt で割って　$m \leqq \dfrac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \leqq M$

ここで　$\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} m=S(t)$，$\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} M=S(t)$

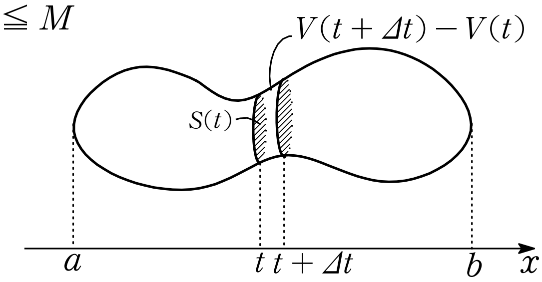
はさみうちの原理を用いて

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=S(t)$$

このことから　$\dfrac{d}{dt}V(t)=S(t)$ なので

$$\int_a^b S(t)\,dt=\Big[\,V(t)\,\Big]_a^b=V(b)-V(a)$$

すなわち　$\displaystyle\int_a^b S(t)\,dt=V$



い $\Delta t<0$ のとき

同様にして　$m(-\Delta t) \leqq V(t)-V(t+\Delta t) \leqq M(-\Delta t)$

各辺を $-\Delta t$ で割って　$m \leqq \dfrac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \leqq M$

以下，あ と同じように成り立つ．

補 微小体積を $\Delta V=V(t+\Delta t)-V(t)$ とすると　$\Delta V=S(t)\Delta t$

座標空間の立体の体積の求め方

座標空間にある立体 K の体積を V を求めるのに次の方法がある．

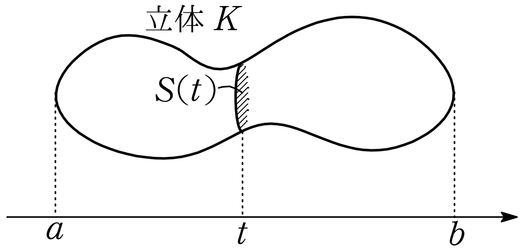
1 立体 K の座標軸に垂直な平面における断面積（切り口の面積）を求める．

すなわち

平面 $x=t$（x 軸に垂直な平面）

平面 $y=t$（y 軸に垂直な平面）

平面 $z=t$（z 軸に垂直な平面）



の 3 つの平面のうちのいずれかの断面積 $S(t)$ を求める．

2 断面が存在する区間 $a \leqq t \leqq b$ で $S(t)$ を求積する．

つまり $V=\displaystyle\int_a^b S(t)\,dt$

㊫ 平面 $x=t$ における断面 $S(t)$ の場合は 定積分と体積 と同じ

㊗ 立体の形がわからなくても断面積 $S(t)$ が立式できれば体積は求まる．

㊗ 回転体の体積を求める場合は迷わず回転軸に垂直な平面の断面を考える．（円がみえる）
その場合，回転後ではなく，回転前の断面を回転軸上の点を中心として，その平面で回転させて，通過する領域が断面積になることを考える．

㊗ 回転体ではない体積を求める場合の断面積を考える平面については
「断面積が求めやすい」「断面が存在する区間がわかる」「対称性を保つ」
などを意識する．

㊗ 平面 $z=t$ における断面は xy 平面に正射影して，xy 平面で考えることができる．
同様に
平面 $x=t$ における断面は yz 平面に正射影して，yz 平面で考えることができる．
平面 $y=t$ における断面は xz 平面に正射影して，xz 平面で考えることができる．
断面積は実質，座標平面での面積を求めることになる．

x 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 Ⅰ

座標空間において

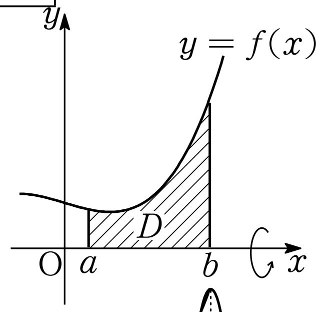
xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$（x 軸）

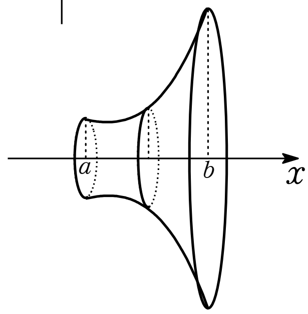
および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

囲まれた図形 D を

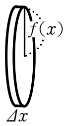
x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$
$$=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$





㊂ 微小体積 $\mathit{\Delta}V$ は底面が半径 $f(x)$ の円，高さが $\mathit{\Delta}x$ の円柱なので

$\mathit{\Delta}V=$  $=\pi\cdot\{f(x)\}^2\mathit{\Delta}x$

$\mathit{\Delta}V$ を a から b まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

x 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 Ⅱ

座標空間において

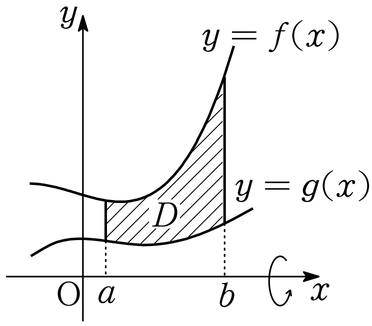
区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ あるいは $f(x) \leqq g(x) \leqq 0$ とする.

xy 平面の連続な 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

囲まれた図形 D を

x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると



$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx-\int_a^b \pi\{g(x)\}^2\,dx$$
$$=\pi\int_a^b\left(\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right)dx$$

注 $V=\int_a^b \pi\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ とするのは間違い.

考 外側の曲線 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積から
内側の曲線 $y=g(x)$ を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積をひく.

y 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 Ⅰ

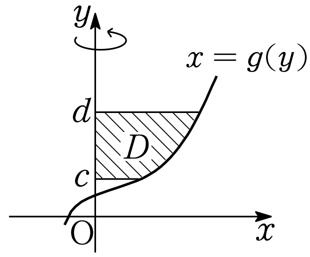
座標空間において

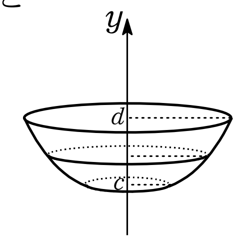
xy 平面の連続な曲線 $x=g(y)$ と $x=0$（y 軸）

および 2 直線 $y=c,\ y=d$（$c<d$）で

囲まれた図形 D を

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

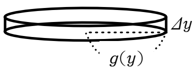




$$V=\int_c^d \pi x^2\,dy$$

$$=\int_c^d \pi\{g(y)\}^2\,dy$$

㊄ 微小体積 $\varDelta V$ は底面が半径 $g(y)$ の円，高さが $\varDelta y$ の円柱なので

$\varDelta V=$  $=\pi\cdot\{g(y)\}^2\varDelta y$

$\varDelta V$ を c から d まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

y 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 II

座標空間において

xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $x=0$（y 軸）

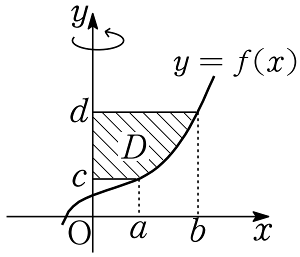
および 2 直線 $y=c, y=d$（$c<d$）で

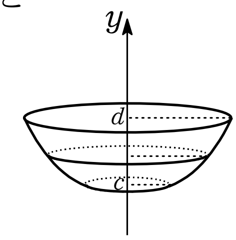
囲まれた図形 D を

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

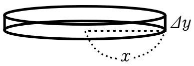
$f(a)=c$，$f(b)=d$ ならば

$$V=\int_c^d \pi x^2\,dy$$
$$=\int_a^b \pi x^2\frac{dy}{dx}dx=\int_a^b \pi x^2 f'(x)dx$$





㊝ 微小体積 $\varDelta V$ は底面が半径 x の円，高さが $\varDelta y$ の円柱なので

$\varDelta V=$  $=\pi\cdot x^2\varDelta y$

$\varDelta V$ を c から d まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

$y=f(x)$ を $x=g(y)$ に変形しなくても x の積分に置換積分することもできる．

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積（円筒分割）

座標空間において

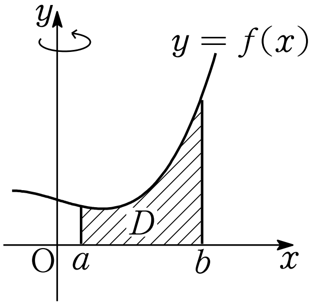
xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$（x 軸）

および 2 直線 $x=a,\,x=b\ (a<b)$ で

囲まれた図形 D を

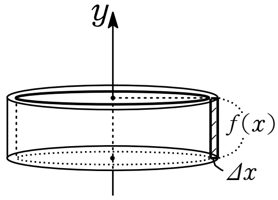
y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\int_a^b 2\pi xy\,dx$$
$$=\int_a^b 2\pi xf(x)\,dx$$

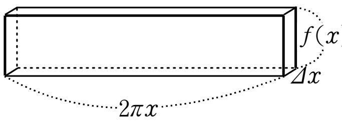


㊟ 世間では「バームクーヘン積分」とも言われている．

㊫ 微小体積 ΔV は底面が Δx，高さが $f(x)$ の長方形を y 軸のまわりに回転して



これを広げると横が半径 x の円周の長さ $2\pi x$，縦が Δx，高さが $f(x)$ の直方体になり

$\Delta V=$  $=2\pi x\cdot f(x)\Delta x$

ΔV を a から b まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積（円筒分割）II

座標空間において

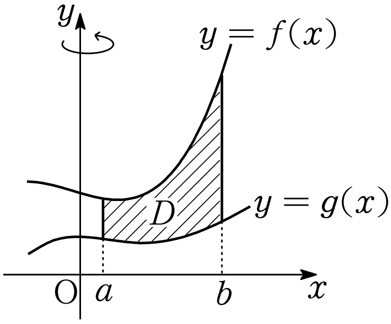
xy 平面の連続な 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a, x=b\ (a<b)$ で

囲まれた図形 D を

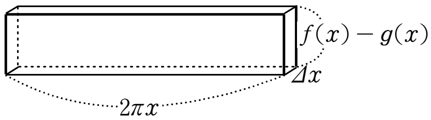
y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\int_a^b 2\pi x\{f(x)-g(x)\}\,dx$$



補 世間では「バームクーヘン積分」とも言われている．

考 微小体積 $\varDelta V$ は横が $2\pi x$，縦が $\varDelta x$，高さが $f(x)-g(x)$ の直方体になり

$\varDelta V=$  $=2\pi x\cdot\{f(x)-g(x)\}\varDelta x$

$\varDelta V$ を a から b まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

補 $y=g(x)$ を $y=0$（x 軸）とすると

$\boxed{\text{$y$ 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積（円筒分割）I}}$

斜回転体の体積（座標軸の設定）

xy 平面に

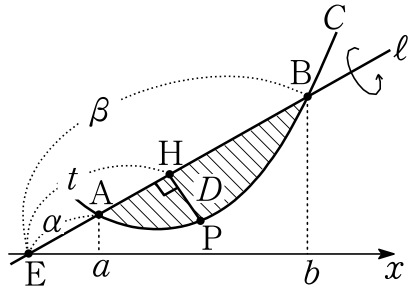
曲線 $C : y = f(x)$ と 直線 ℓ がある．

右の図のように C と ℓ は x 座標が a と b $(a < b)$

の 2 点 A，B の交点をもつとし，

$a \leqq x \leqq b$ において C と ℓ で囲まれた図形 D を

ℓ のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする．



このとき $a \leqq x \leqq b$ における C 上の点を P とし

P を通り ℓ に垂直な直線と ℓ の交点を H とする．

ℓ と x 軸の交点を E とし EH $= t$ とおくと PH は t の関数で表せる．

これらのことから EA $= \alpha$，EB $= \beta$ として

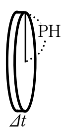
$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi \mathrm{PH}^2 \, dt$$

考 E(0, 0) とし，ℓ を t 軸としてみて

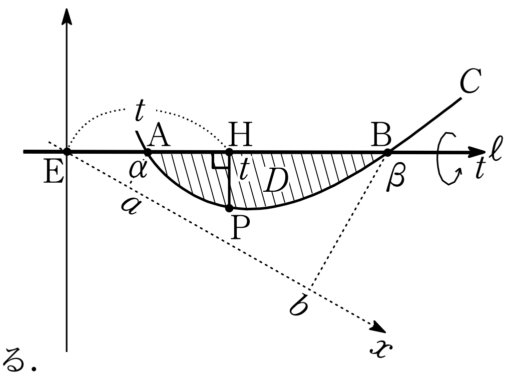
A$(\alpha, 0)$，B$(\beta, 0)$，H$(t, 0)$ となる座標軸を設定する．

微小体積を $\varDelta V$ とすると

底面が半径 PH の円，高さが $\varDelta t$ の円柱なので

$\varDelta V =$  $= \pi \mathrm{PH}^2 \varDelta t$

$\varDelta V$ を α から β まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．



斜回転体の体積（傘型分割）

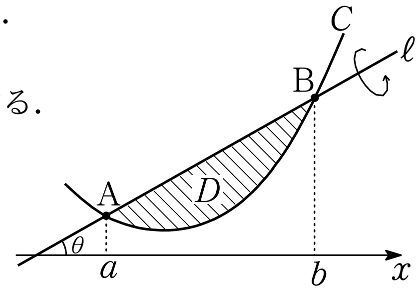
xy 平面に

曲線 $C : y = f(x)$ と 直線 $\ell : y = g(x)$ がある．

ℓ を x 軸正方向となす角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

右の図のように C と ℓ は x 座標が a と b $(a < b)$

の 2 点 A，B の交点をもつとし，

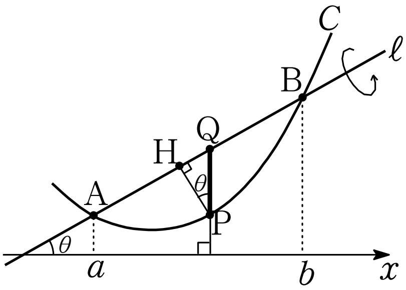


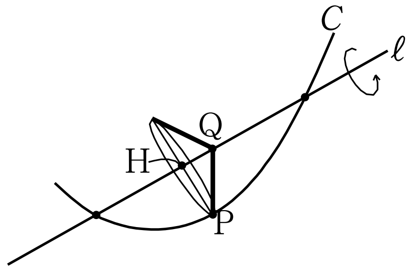
$a \leqq x \leqq b$ において C と ℓ で囲まれた図形 D とする．

D を ℓ のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V = \int_a^b \pi\{g(x) - f(x)\}^2 \cos\theta\, dx$$

㊕ 点 P から ℓ へ垂線 PH を下ろし，ℓ 上の点で点 P と同じ x 座標の点を Q とすると下図のようになる．





$\mathrm{QP} = g(x) - f(x)$

$\angle\mathrm{QPH} = \theta$ であり　$\mathrm{HP} = \mathrm{QP}\cos\theta = \{g(x) - f(x)\}\cos\theta$

微小体積 $\varDelta V$ は底面が中心 H，半径 HP の円で頂点が Q の円錐の表面に厚み $\varDelta x$ をつけた立体の体積である．

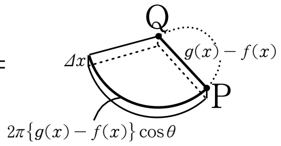
展開して考えると，底面が中心 Q，半径 QP とする扇形，高さが $\varDelta x$ の柱体になる．

底面の扇形の半径は $\mathrm{QP} = g(x) - f(x)$

底面の扇形の弧の長さは半径 HP の円の周の長さより

$$2\pi\mathrm{HP} = \mathrm{QP}\cos\theta = 2\pi\{g(x) - f(x)\}\cos\theta$$

これらのことから

$\varDelta V =$ 

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\{g(x) - f(x)\}\cos\theta\cdot\{g(x) - f(x)\}\varDelta x$$

$$= \pi\{g(x) - f(x)\}^2\cos\theta\varDelta x$$

$\varDelta V$ を a から b まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

㊗ （扇形の面積）$= \dfrac{1}{2}$ ×（弧の長さ）×（半径）

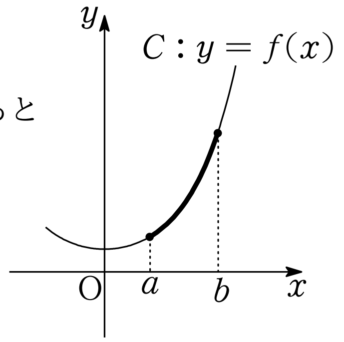
関数が表す曲線の長さ

座標平面の連続な曲線 $C : y = f(x)$ について

曲線 C の $a \leqq x \leqq b$ で表された曲線の長さを L とすると

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$



㊟ 厳密な証明は高校の範囲をこえるので，無限小での理解でよい．

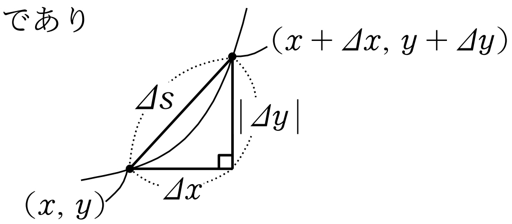
㊍ 曲線を折れ線に分割し，微小な弧長を $\varDelta s$ とする．

$\varDelta s$ は曲線上の 2 点 (x, y)，$(x + \varDelta x, y + \varDelta y)$ の長さであり

$$\varDelta s = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2\right\}(\varDelta x)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2\right\}}\,\varDelta x$$



$\varDelta s$ を a から b まで求積して（たし合わせて）曲線の長さは求まる．

媒介変数で表された曲線の長さ

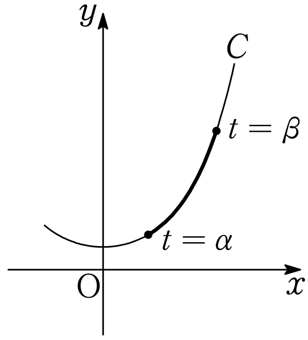
座標平面の媒介変数 t で表された連続な曲線 C : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

について

曲線 C の $\alpha \leqq t \leqq \beta$ で表された曲線の長さを L とすると

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\,dt$$



注 厳密な証明は高校の範囲をこえるので，無限小での理解でよい.

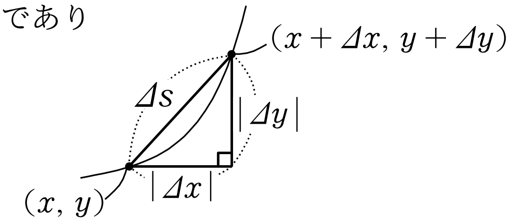
考 曲線を折れ線に分割し，微小な弧長を $\varDelta s$ とする.

$\varDelta s$ は曲線上の 2 点 $(x,\ y)$，$(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$ の長さであり

$$\varDelta s = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2\right\}(\varDelta t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}\,\varDelta t$$



$\varDelta s$ を α から β まで求積して（たし合わせて）曲線の長さは求まる.

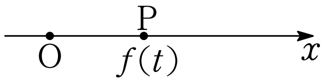
補 $x(t) = t$，$y(t) = f(t)$ とすると $\boxed{\text{関数が表す曲線の長さ}}$

数直線上を運動する点の道のり

座標平面上を運動する点 P(x) の 時刻 t における x 座標が t の関数

$$x = f(t)$$

と表されるとき，速度を v とすると



$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

1　時刻 t_1 から時刻 t_2 までの P の位置の変化量は

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt$$

2　時刻 t_1 から時刻 t_2 までの P の道のりを L とすると

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|\,dt$$

すなわち

$$(\text{時刻 } t_1 \text{から時刻 } t_2 \text{の道のり}) = \int_{t_1}^{t_2} (\text{速さ})\,dt$$

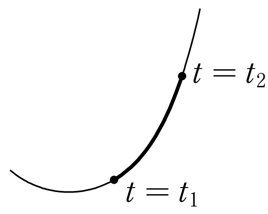
㊗補 1 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt = \Big[\, f(t) \,\Big]_{t_1}^{t_2} = f(t_2) - f(t_1)$

平面上を運動する点の道のり

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の 時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

と表されるとき，速度を $\vec{v}$ とすると



$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\, \frac{dy}{dt} \right)$$

時刻 t_1 から時刻 t_2 までに P が通過する道のりを L とすると

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}\, dt$$

すなわち

$$（時刻\ t_1 から時刻\ t_2 の道のり）= \int_{t_1}^{t_2}（速さ）dt$$

㊜ 媒介変数で表された曲線の長さ

極方程式を媒介変数で表す

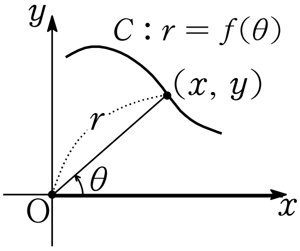
極座標において，極方程式で表される曲線 $C: r=f(\theta)$ について

座標平面で極を O，始線を x 軸正方向とする極座標とすると

媒介変数 θ で表された曲線

$$C:\begin{cases} x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる．



㊎ 極方程式 $r=\theta$ は

$$\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$$

と表せる．

☆極方程式と面積

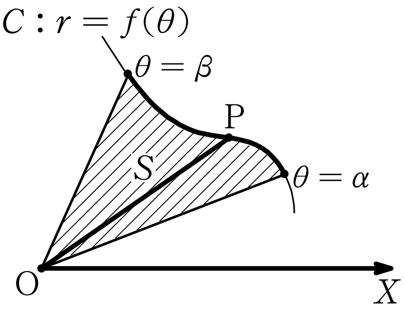
極座標において，極を O とする．

極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

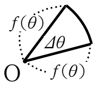
C 上の点 P が $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ をみたしながら動くとき

線分 OP が通過する領域の面積を S とすると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \{f(\theta)\}^2 \, d\theta$$



㊕ 微小量 $\Delta\theta$ に対する微小面積を ΔS とすると，半径 $f(\theta)$，中心角 $\Delta\theta$ の扇形なので

$\Delta S =$ 

$= \dfrac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 \Delta\theta$

ΔS を α から β まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

㊓ 極方程式を媒介変数で表す，媒介変数で表された曲線の面積を考えてもよい．

★極方程式と体積

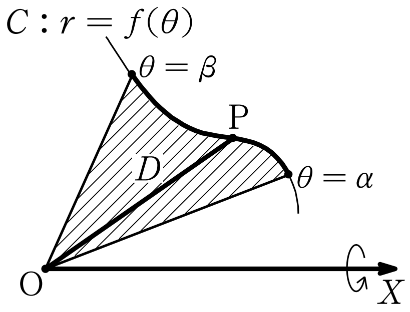
極座標において，極を O とする．

極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

C 上の点 P が $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ をみたしながら動くとき

線分 OP が通過する領域を D とする．

ただし $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$



D を始線を表す直線のまわりに回転してできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi \{f(\theta)\}^3 \sin\theta \, d\theta \end{aligned}$$

考（強引な説明でお許しください）

微小量 $\varDelta\theta$ に対する微小体積を $\varDelta V$ とする．

半径 r，中心角 $\varDelta\theta$ の扇形の面積を S，重心を G とし，

点 G から始線を表す直線への距離を R とすると

$$S = \frac{1}{2}r^2\varDelta\theta$$

$\mathrm{OG} = \dfrac{2}{3}r$ より $R = \dfrac{2}{3}r\sin\theta$

$\boxed{\text{パップス・ギュルダンの定理}}$を用いて

$$\varDelta V = 2\pi RS = 2\pi \cdot \frac{2}{3}r\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\varDelta\theta = \frac{2}{3}r^3\sin\theta$$

$\varDelta V$ を α から β まで求積して（たし合わせて）体積は求まる．

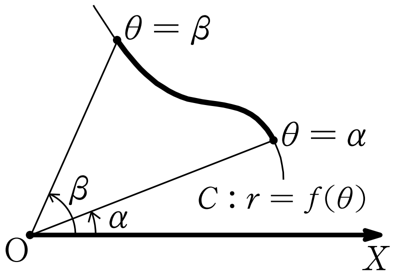
補 $\boxed{\text{極方程式を媒介変数で表す}}$，$\boxed{\text{媒介変数で表された曲線の体積}}$を考えてもよい．

★極方程式と曲線の長さ

極座標で極方程式で表される曲線 $C: r=f(\theta)$ について

C の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ で表される曲線の長さを L とすると

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left\{f'(\theta)\right\}^2+\left\{f(\theta)\right\}^2}\,d\theta$$



考 直交座標で極を O，始線を x 軸正方向として，C 上の点を (x, y) とすると

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

それぞれ θ で微分して

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

それぞれ 2 乗して

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2=\left\{f'(\theta)\right\}^2\cos^2\theta-2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta+\left\{f(\theta)\right\}^2\sin^2\theta \\ \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=\left\{f'(\theta)\right\}^2\sin^2\theta+2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta+\left\{f(\theta)\right\}^2\cos^2\theta \end{cases}$$

これらをたして

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left\{f'(\theta)\right\}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\left\{f(\theta)\right\}^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\left\{f'(\theta)\right\}^2+\left\{f(\theta)\right\}^2$$

媒介変数で表された曲線の長さ より

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left\{f'(\theta)\right\}^2+\left\{f(\theta)\right\}^2}\,d\theta$$

★ガウス・グリーンの定理

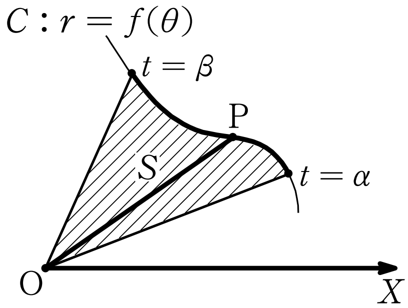
座標平面の媒介変数 t で表された曲線 $C:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ について

C 上の点 P が $\alpha \leqq t \leqq \beta$ をみたしながら原点 O の周りを反時計周りに動くとき

線分 OP が通過する領域の面積を S とすると

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left|x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right|dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left|f(t)g'(t)-g(t)f'(t)\right|dt$$



考 O を原点，微小量 $\varDelta t$ に対する x，y の増分を $\varDelta x$，$\varDelta y$ として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$

とする．

微小面積を $\varDelta S$ とすると △OPP′ なので

$$\varDelta S=\frac{1}{2}\left|x(y+\varDelta y)-y(x+\varDelta x)\right|=\frac{1}{2}\left|x\varDelta y-y\varDelta x\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x\frac{\varDelta y}{\varDelta t}-y\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right|\varDelta t$$

$\varDelta S$ を α から β まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

★パップス・ギュルダンの定理

平面上にある図形 F の面積を S とする．

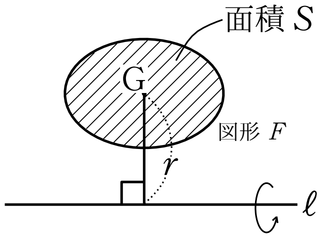
F と同じ平面上にあり F を通らない直線を ℓ とし，

F を ℓ の周りに回転させてできる回転体の体積を V とする．

このとき F の重心 G と直線 ℓ の距離を r として

$$V = 2\pi rS$$

つまり（回転体の体積）$= 2\pi \times$（重心と軸の距離）$\times$（図形の面積）



㊟ 図形 F と ℓ が交わるときは成り立たない．

(補) 特殊なケースでは証明できるが，一般的な証明は高校数学の範囲をこえる．

(補) 重心 G を ℓ のまわりに回転すると，半径 r の円周を描き，その長さは $2\pi r$
これに面積をかけると体積になる．

★微分方程式

未知の関数の導関数を含む等式を **微分方程式** という．

与えられた微分方程式を満たす関数を，その微分方程式の**解**といい，

解を求めることを，その微分方程式を**解く**という．

微分方程式の解は，いくつかの任意の定数を含む関数となるが，

その解を**一般解**という．

一般解の定数を定めたものを**特殊解**という．

解に含まれる定数の値を定めることができる条件を初期条件という．

㋭ 微分方程式は関数方程式の 1 つ．

話 微分方程式は様々な分野で活用されているので，高校数学でも必修にしてもよいかと個人的には思いますが．今では数学 Ⅲ の発展事項にひっそりと書いてあるだけで悲しい．
と言っても，微分方程式に関連する入試問題は出題されている．
このくらいできて入学してほしいというメッセージなのでしょう．

例 y は x の関数として，微分方程式 $y' = 2x$ を解くと
一般解は $y = x^2 + C$ (C は任意の定数)
$C = 1$ として $y = x^2 + 1$ となるが，これを特殊解という．
初期条件を「$x = 0$ のとき $y = 0$」とすると $C = 0$ と定まり，解は $y = x^2$

例 y は x の関数として，微分方程式 $y'' = 2$ を解くと
不定積分を考えて　$y' = 2x + C_1$ (C_1は任意の定数)
一般解は　$y = x^2 + C_1x + C_2$ (C_1，C_2は任意の定数)
$C_1 = 1$，$C_2 = 1$ として $y = x^2 + x + 1$ となるが，これを特殊解という．
初期条件を「$x = 0$ のとき $y = 0$，$y' = 0$」とすると $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ と定まり．
解は $y = x^2$
y についての導関数しかない場合は不定積分から関数 y は容易に求まる．

★微分方程式 $g(y)\dfrac{dy}{dx}=h(x)$（変数分離系）

y を x の関数とする．

微分方程式 $g(y)\dfrac{dy}{dx}=h(x)$ について

$$g(y)\,dy=h(x)\,dx$$

と変形できる．

これは（y の式）dy =（x の式）dx の形で表せている．

このような微分方程式を **変数分離形** という．

この形は両辺に $\int$ をつけて

$$\int g(y)\,dy=\int h(x)\,dx$$

として両辺をそれぞれ積分することで解が求まる．

㊟補 $dy,\,dx$ を分離しない変形もかいておく．

$g(x)\dfrac{dy}{dx}=h(x)$ の両辺を x で積分して

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx=\int h(x)\,dx$$

すなわち

$$\int g(y)\,dy=\int h(x)\,dx$$

例 y は x の関数として，微分方程式 $y'=2y$ を解く．

$y'=\dfrac{dy}{dx}$ として $\dfrac{dy}{dx}=2y$

あ $y=0$ のとき $y'=0$ より $y'=2y$ を満たす．

い $y\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{1}{y}dy=2dx$

すなわち $\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy=\int 2\,dx$

両辺をそれぞれ積分して $\log|y|=2x+C_1$（C_1は任意の定数）

$\therefore\ |y|=e^{2x+C_1}=e^{C_1}e^{2x}$ すなわち $y=\pm e^{C_1}e^{2x}$

$\pm e^{C_1}$ は定数なので $\pm e^{C_1}=C$ と置きなおせる．

ゆえに $y=Ce^{2x}$

これは，$C=0$ のときに $y=0$ となるから あ の場合も含む．

よって．一般解は $\boldsymbol{y=Ce^{2x}}$ **（C は任意の定数）**

別（い を変数分離でやらない）

$y=f(x)$ とおくと $y'=f'(x)$

$y'=2y$ は $f'(x)=2f(x)$ であるから $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$

両辺を x で積分して $\log|f(x)|=2x+C_1$

$f(x)=y$ であるから $\log|y|=2x+C_1$（C_1は任意の定数）（上と同じ）

★微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の一般解

y を x の関数，a を定数とする．

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の一般解は

$y = Ce^{ax}$（C は任意の定数）

考 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ $\cdots\cdots\circledast$

を解く．

あ $y = 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 0$ より $\circledast$ は $0 = 0$ で満たす．

い $y \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y}dy = adx$

すなわち $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int a\,dx$

両辺をそれぞれ積分して $\log|y| = ax + C_1$（C_1は任意の定数）

$\therefore |y| = e^{ax+C_1} = e^{C_1}e^{ax}$ すなわち $y = \pm e^{C_1}e^{2x}$

$\pm e^{C_1}$ は定数なので $\pm e^{C_1} = C$ と置きなおせる．

ゆえに $y = Ce^{ax}$

これは，$C = 0$ のときに $y = 0$ となるから あ の場合も含む．

よって．一般解は $\boldsymbol{y = Ce^{ax}}$ **（$\boldsymbol{C}$ は任意の定数）**

別（い を変数分離でやらない）

$y = f(x)$ とおくと，$\circledast$ は $f'(x) = af(x)$ であるから $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = a$

両辺を x で積分して $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int a\,dx$

すなわち $\log|f(x)| = ax + C_1$

$f(x) = y$ であるから $\log|y| = ax + C_1$（C_1は任意の定数）（上と同じ）

補 微分方程式では分母が 0 になることは暗黙の了解で気にしなくてもよいことが多く，

あ は省略しても許されることが多い．

例 $f(0) = 1$，$f'(x) = 2f(x)$ を満たす $f(x)$ を求めると

一般解は $f(x) = Ce^{2x}$（C は任意の定数）

$f(0) = 1$ であるから $C = 1$

よって $\boldsymbol{f(x) = e^{2x}}$