数学Ⅲ　積分法

教科書の「不定積分」「定積分」をまとめています.

原始関数 / 不定積分 / 積分する / 関数 x^{α} の積分 / ☆ $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の積分 /
三角関数（正弦・余弦）の積分 / 指数関数の積分 / 関数 $f(px+q)$ の積分 /
合成関数の積分 / 関数 x^{α} の合成関数の積分 /
三角関数（正弦・余弦）の合成関数の積分 / 指数関数の合成関数の積分 /
和・差・実数倍の不定積分 / 分数関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の積分 /
三角関数 $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ の積分 / 三角関数（積の形）の積分 /
★三角関数 $\dfrac{1}{\cos x}$, $\dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{1}{\sin 2x}$ の積分 / 三角関数（正接）の積分 /
定積分 / 定積分の表記 / 和・差・実数倍の定積分 Ⅰ /
和・差・実数倍の定積分 Ⅱ / 和・差・実数倍の定積分 Ⅲ / 定積分の性質 /
定積分の基本性質 / 定積分の値 / 定積分の導関数（微積分学の基本定理）/
☆定積分の導関数（微積分学の基本定理）Ⅱ / 部分積分法 /
対数関数 $\log x$ の積分 / ☆関数の積 $f(x)g(x)$ $\big(f(x)$ は整式$\big)$ の部分積分 /
（整式）×（関数）の有名な部分積分（瞬間部分積分）/
（指数関数）×（三角関数）の積分 / （指数関数）×（三角関数）の積分 Ⅱ /
☆関数 $e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}$ の積分 / 置換積分法 /
$\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ を含む積分 / 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ /
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ を含む積分 / 偶関数 / 奇関数 / 偶関数と奇関数の積 /
偶関数・奇関数の定積分 / ★ $f(x)=$（偶関数）+（奇関数）/
グラフの対称性と定積分 / ☆定積分の等式 /
★キングプロパティ（King Property）/ $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ の漸化式 /
$I_n=\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ の漸化式 / $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ の漸化式 /
$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ の漸化式 / $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ の漸化式 /
☆定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ / ☆逆関数の定積分 / 区分求積法 /
和の極限と定積分 Ⅰ / ★区分求積法の等式 / 和の極限と定積分 Ⅱ /
和の極限と定積分の準公式 / 定積分と不等式（積分評価）Ⅰ /
定積分と不等式（積分評価）Ⅱ / 絶対値と定積分の不等式 /
絶対値と定積分の不等式 Ⅱ /

原始関数

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$

すなわち $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の 原始関数（げんしかんすう） という．

㊎ $(x^2)' = 2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2
$(x^2+1)' = 2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2+1

不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x) = f(x)$

このとき，C を定数として

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表せて

$\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の 不定積分（ふていせきぶん） という．

C を 積分定数（せきぶんていすう） という．

㊓ 記号 $\int$ は「インテグラル」または「積分」と読む．

㊎ $\int 2x\,dx = x^2 + C$（C は積分定数）

積分する

x の関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めることを

$f(x)$ を x で 積分（せきぶん）する という．

㊓ 大雑把に言うと，微分の逆演算が積分．

関数 x^{α} の積分

α を実数，C を積分定数として x^{α} の積分は

$\boxed{1}$ $\alpha \neq -1$ ならば $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$\boxed{2}$ $\alpha = -1$ ならば $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

㊫ $\boxed{1}$ $\alpha \neq -1$ ならば $\left(\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$

$\boxed{2}$ $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

☆関数 $\dfrac{1}{x^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の積分

C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$

㊚ $\boxed{\text{関数 } x^{\alpha} \text{ の積分}}$ の $\alpha = -2,\ -\dfrac{1}{2}$ の場合

㊫ $\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ より $\left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{2}$ $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より $(2\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

三角関数（正弦・余弦）の積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

㋢ $\boxed{1}$ $(\cos x)' = -\sin x$ より $(-\cos x)' = \sin x$

$\boxed{2}$ $(\sin x)' = \cos x$

$\boxed{3}$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ より $\left(-\dfrac{1}{\tan x}\right)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

指数関数の積分

a は 1 以外の正の定数，C を積分定数とする．

1 $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

2 $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

考 1 $(e^x)' = e^x$

2 $(a^x)' = a^x \log a$ より $\left(\dfrac{a^x}{\log a}\right) = a^x$

例 2 $\displaystyle\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\log 5} + C$

関数 $f(px+q)$ の積分

$F'(x)=f(x)$，p，q は定数，$p \neq 0$，C を積分定数とするとき

$$\int f(px+q)\,dx=\frac{1}{p}F(px+q)+C$$

㊂ $\{F(px+q)\}'=pf(px+q)$ より $\left\{\frac{1}{p}F(px+q)\right\}'=f(px+q)$

㊥ $(px+q)'=p$ が出てくるから p で割る．

㊀ $\displaystyle\int(2x+1)^3\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4+C=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$

㊀ $\displaystyle\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

㊀ $\displaystyle\int\sin(px+q)\,dx=-\frac{1}{p}\cos(px+q)+C$

合成関数の積分

$F'(x) = f(x)$, C を積分定数とするとき

$$\int g'(x) f\bigl(g(x)\bigr)\, dx = F\bigl(g(x)\bigr) + C$$

㋕ $\{F\bigl(g(x)\bigr)\}' = g'(x) f\bigl(g(x)\bigr)$

関数 x^α の合成関数の積分

α を実数，C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\alpha \neq -1$ として $\displaystyle\int g'(x)\{g(x)\}^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\{g(x)\}^{\alpha+1}+C$

とくに

$\alpha=-2$ とすると $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}dx = -\frac{1}{g(x)}+C$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ とすると $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx = 2\sqrt{g(x)}+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)|+C$

例 $g(x)=x^2+1$ とすると $g'(x)=2x$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2+1)^4+C$

$\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+1}+C$

$\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = 2\sqrt{x^2+1}+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1)+C$

三角関数（正弦・余弦）の合成関数の積分

C を積分定数とする.

1 $$\int g'(x)\sin g(x)\,dx = -\cos g(x) + C$$

2 $$\int g'(x)\cos g(x)\,dx = \sin g(x) + C$$

3 $$\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\,dx = \tan g(x) + C$$

4 $$\int \frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}\,dx = -\frac{1}{\tan g(x)} + C$$

例 $g(x) = x^2 + 1$ とすると　$g'(x) = 2x$

1 $\displaystyle\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = -\cos(x^2+1) + C$

2 $\displaystyle\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = \sin(x^2+1) + C$

3 $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}\,dx = \tan(x^2+1) + C$

4 $\displaystyle\int \frac{2x}{\sin^2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{\tan(x^2+1)} + C$

指数関数の合成関数の積分

C を積分定数とする.

1 $$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C$$

2 $$\int g'(x)a^{g(x)}\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\log a} + C$$ （a は 1 以外の正の定数）

例 $g(x) = x^2 + 1$ とすると　$g'(x) = 2x$

1 $\displaystyle\int 2xe^{x^2+1}\,dx = e^{x^2+1} + C$

2 $\displaystyle\int 2x\cdot 3^{x^2+1}\,dx = \frac{3^{x^2+1}}{\log 3} + C$

和・差・実数倍の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$，C を積分定数とするとき，

$\boxed{1}$ $$\int\left\{f(x)+g(x)\right\}dx=F(x)+G(x)+C$$

$\boxed{2}$ $$\int\left\{f(x)-g(x)\right\}dx=F(x)+G(x)+C$$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $$\int k\,f(x)\,dx=kF(x)+C$$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int\left\{s\,f(x)+t\,g(x)\right\}dx=s\,F(x)+t\,G(x)+C$$

考 $\boxed{1}$ $\left\{F(x)+G(x)\right\}'=f(x)+g(x)$

$\boxed{2}$ $\left\{F(x)-G(x)\right\}'=f(x)-g(x)$

$\boxed{3}$ $\left\{k\,F(x)\right\}'=kf(x)$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int(x^2+x)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int(x^2-x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int 3x^2\,dx=3\int x^2\,dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+C=x^2+C$

例 $\displaystyle\int(3x^2+5x)\,dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2+C=x^3+\frac{5}{2}x^2$

分数関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の積分

分数関数の積分 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ について，次のような変形をすることがある．

$\boxed{1}$ $g(x)$ が積の形になるならば

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を部分分数分解する．

$\boxed{2}$ $f(x)$，$g(x)$ がともに整式で

$\big(f(x)$ の次数$\big) \geqq \big(g(x)$ の次数$\big)$

ならば

$f(x)$ を $g(x)$ で割って，分子の次数を下げる．

補 直接に積分できる場合は変形しなくてよい．

関数 x^α の合成関数の積分 の積分をすることが多い．

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の式は様々なので場合によっては $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 以外の変形もある．

補 $\boxed{1}$ 部分分数分解とはいくつかの分数の和（差）の形にすること．

$\boxed{2}$ 分子の次数が分母より同じか大きいとき，整式の除法で商と余りを求めて変形する．

例 $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \log|x^2+1| + C \quad \leftarrow \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C$

のように直接に積分できる場合は変形しなくてもよい．

例 $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x}\,dx &= \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \quad \leftarrow \text{分母が積の形になる}\\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \quad \leftarrow \text{部分分数分解}\\ &= \log|x| - \log|x+1| + C\\ &= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{x(x^2+1)+2x}{x^2+1}\,dx \quad \leftarrow (\text{分子の次数は}\ 3) > (\text{分母の次数は}\ 2)\\ &= \int \left(x + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx \quad \leftarrow \text{分子の次数を}\ 1\ \text{に下げた}\\ &= \frac{x^2}{2} + \log|x^2+1| + C\end{aligned}$$

話 整式，有理関数$\left(\dfrac{\text{整式}}{\text{整式}}\text{の形の関数}\right)$，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数を初等関数という．

$f(x)$，$g(x)$ が初等関数の場合，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分することは容易できる．

しかし，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を積分するとなると難しい．

例えば，$\dfrac{\sin x}{x}$ を積分すると $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ となるが，初等関数では表すことができず，高校の範囲を超える．

だがら，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を変形しても積分できないことが普通にある．

三角関数 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$ の積分

C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$\boxed{2}$ $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

㊟ $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ であるから $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ としないこと．
$\left(\dfrac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \sin^2 x \cos x$ であるから $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 x + C$ もダメ

補 半角の公式を利用して 2 乗を消して積分する．

考 $\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$ を考える．

三角関数（積の形）の積分

p, q を $p+q \neq 0$，$p-q \neq 0$ となる定数，C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \sin px \cos qx\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \{\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(p+q)x}{p+q} - \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right\} + C$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \cos px \cos qx\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right\} + C$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \sin px \sin qx\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \{\cos(p+q)x - \cos(p-q)x\}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right\} + C$$

補 積から和・差の公式 を利用して積を和（差）の形にして積分する.

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \cos 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 5x}{5} + \sin x\right) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \sin 3x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos x)\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 5x}{5} - \sin x\right) + C$

★三角関数 $\dfrac{1}{\cos x}$，$\dfrac{1}{\sin x}$，$\dfrac{1}{\sin 2x}$ の積分

C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

$\boxed{2}$ $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$$

$\boxed{3}$ $$\int \frac{1}{\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\log|\tan x| + C$$

考 $\boxed{1}$
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$$

と変形できることから

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\log|1+\sin x| - \log|1-\sin x|\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

$\boxed{2}$
$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

と変形できることから

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\log|1-\cos x| - \log|1+\sin x|\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$$

$\boxed{3}$
$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{2\tan x\cdot\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}$$

と変形できることから

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\log|\tan x| + C$$

補 $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$ は同じ積分ではあるが，違う変形で積分できるので 2 つかいてみた．

$\boxed{2}$ で $x = 2t$ と置換すると $\dfrac{dx}{dt} = 2$ であることに注意して

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin 2t}\cdot 2dt = 2\int \frac{1}{\sin 2t}dt = 2\cdot\frac{1}{2}\log|\tan t| + C\ (\because \boxed{3})$$
$$= \log|\tan t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\ \left(\because t = \frac{x}{2}\right)$$

三角関数（正接）の積分

C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

考 $\boxed{1}\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C$ を考える．

$\boxed{3}\boxed{4}$ 三角関数（正弦・余弦）の積分を考える．

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，2 つの実数 $a,\ b$ に対して 差 $F(b)-F(a)$ を

関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分**（ていせきぶん）といい $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す.

a をこの定積分の下端（かたん），b を上端（じょうたん）という.

定積分を求めることを $f(x)$ を a から b まで**積分する**という.

また $F(b)-F(a)$ を記号 $\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b$ で表わす.

定積分の表記

$F'(x)=f(x)$ として

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

㊎ $F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ を 1 つ求めて，上端と下端を代入して引く.

㊟ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx=\Big[\ \sin x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

和・差・実数倍の定積分 Ⅰ

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とするとき，

$\boxed{1}$ $$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\Big[\,F(x)+G(x)\,\Big]_a^b$$

$\boxed{2}$ $$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx=\Big[\,F(x)-G(x)\,\Big]_a^b$$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx=\Big[\,k\,F(x)\,\Big]_a^b$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b\{s\,f(x)+t\,g(x)\}\,dx=\Big[\,s\,F(x)+t\,G(x)\,\Big]_a^b$$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^1(x^2+x)\,dx=\Big[\,\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^2(x^2-x)\,dx=\Big[\,\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx=\Big[\,3\cdot\frac{1}{3}x^3\,\Big]_0^1=\Big[\,x^3\,\Big]_0^1=1$

例 $\displaystyle\int_1^2(3x^2+5x)\,dx=\Big[\,3\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2\,\Big]_0^1=\Big[\,x^3+\frac{5}{2}x^2\,\Big]_0^1=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

和・差・実数倍の定積分 Ⅱ

1 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

3 k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b \{s\,f(x)+t\,g(x)\}\,dx = s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx$$

例 1 $\displaystyle\int_1^2 (x^2+x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx$

2 $\displaystyle\int_1^2 (x^2-x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx$

3 $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx$

例 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+5x)\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx + 5\int_1^2 x\,dx$

注 積について $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$ は成り立たない．

補 (右辺) から (左辺) にも変形できるとよいので，念のため下にかいておく．

和・差・実数倍の定積分 Ⅲ

1 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx$

2 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$

3 k を実数とするとき $\displaystyle k\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,f(x)\,dx$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{s\,f(x)+t\,g(x)\}\,dx$$

和・差・実数倍の定積分 Ⅱ の (左辺) と (右辺) を入れ替えただけ．

定積分の性質

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

㊟ $F'(x)=f(x)$ とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^a=F(a)-F(a)=0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)=-\big\{F(a)-F(b)\big\}=-\Big[\,F(x)\,\Big]_b^a$

$\displaystyle\quad=-\int_b^a f(x)\,dx$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_c^a+\Big[\,F(x)\,\Big]_c^b=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$

$\displaystyle\quad=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

㊑ $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_1^1 x^2\,dx=0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_2^1 x^2\,dx=-\int_1^2 x^2\,dx=-\Big[\,\frac{1}{3}x^3\,\Big]_1^2=-\frac{1}{3}(2^3-1^3)=-\frac{7}{3}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 x^2\,dx=\int_0^2 x^2\,dx=\Big[\,\frac{1}{3}x^3\,\Big]_0^2=\frac{8}{3}$

定積分の基本性質

定積分は変数の取り方に関係なく同じ値になる.

すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

㊟ 他の変数に変えても意味が変わらない変数のことを「束縛(そくばく)変数」と言う.

定積分の変数は束縛変数である.

㋑ $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$

$\displaystyle\int_1^2 t^2\,dt = \left[\,\frac{t^3}{3}\,\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$

x^2 の 1 から 2 までの定積分の値は変数の取り方によらず $\dfrac{7}{3}$

すなわち $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \int_1^2 t^2\,dt$

定積分の値

a, b を x によらない定数とする．

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値 は x に無関係な定数である．

㊟補 x で積分して b と a を代入して引くので，x に無関係な定数になる．

㊟例 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$ は x に無関係な定数．

定積分の導関数（微積分学の基本定理）

a は定数，$f(x)$ が連続関数のとき $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると $f(x)$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

㊔ $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[\,F(t)\,\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

ここで $F(a)$ は定数

よって，x で微分すると $f(x)$

㊎ $\displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ を x で微分すると　x^2

すなわち　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t^2\,dt = x^2$

(話) 微分と積分が融合した歴史的な定理のひとつ．

☆定積分の導関数（微積分学の基本定理）Ⅱ

$a(x)$，$b(x)$ は x の関数，$f(x)$ が連続関数のとき

$\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ を x で微分すると $f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x)$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x)$$

㊔ $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \Big[\,F(t)\,\Big]_{a(x)}^{b(x)} = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big)$$

よって，x で微分すると $f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x)$ ← 合成関数の微分法

㊗ $a(x)$ が定数関数の場合は，a を定数として $a(x) = a$ と表わせて，$a'(x) = 0$ となるので

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)\,b'(x)$$

㊗ $b(x)$ が定数関数の場合は，b を定数として $b(x) = b$ と表わせて，$b'(x) = 0$ となるので

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b} f(t)\,dt = -f\big(a(x)\big)\,a'(x)$$

㊗ $a(x)$, $b(x)$ がともに定数関数の場合は，a，b を定数として $a(x) = a$，$b(x) = b$ と表わせて，$a'(x) = 0$, $b'(x) = 0$ となるので

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b} f(t)\,dt = 0$$

㊹ $\displaystyle\int_{1}^{x} t^2\,dt$ を x で微分すると x^2

すなわち $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} t^2\,dt = x^2$

㊹ $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} t^2\,dt = (x^3)^2\cdot(x^3)' - (x^2)^2\cdot(x^2)' = x^6\cdot 3x^2 - x^4\cdot 2x = 3x^8 - 2x^5$

部分積分法

$F'(x) = f(x)$ とするとき

$\boxed{1}$ $$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

積分　　微分

$\boxed{2}$ $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[\ F(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

積分　　微分

考 積の微分法より　$\{F(x)g(x)\}' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$

すなわち　$f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)$

$\boxed{1}$ $$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= \int \Big\{\{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)\Big\}\,dx \\ &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= \int_a^b \Big\{\{F(x)g(x)\}' - F'(x)g'(x)\Big\}\,dx \\ &= \Big[\ F(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

補 積 $f(x)g(x)$ の積分をするが，どちらかを積分し，あとから他方を微分する．

補 $\boxed{2}$ は $\boxed{1}$ で積分した形を利用して求めてもよい．

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx$ $\Big(f(x) = \sin x,\ g(x) = x$ とした$\Big)$

$= -x\cos x + \sin x + C$（C は積分定数）

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx = \Big[\ -x\cos x + \sin x\ \Big]_0^\pi = \boldsymbol{\pi}$

対数関数 $\log x$ の積分

C を積分定数とする．

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$$

考 部分積分法を用いて

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$$

☆関数の積 $f(x)g(x)$ ($f(x)$ は整式) の部分積分

$f(x)$ を 整式 (多項式) とする.

また $g_k(x)$ の原始関数の 1 つを $g_{k+1}(x)$

つまり $\displaystyle\int g_k(x)\,dx = g_{k+1}(x) + C$ (C は積分定数) とする.

このとき 積分 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx$ について

次のように部分積分法を表で求める手順がある.

	微分	積分
⊕	$f(x)$	$g_1(x)$
⊖	$f'(x)$	$g_2(x)$
⊕	$f''(x)$	$g_3(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

1. 右の表のように $f(x)$ を書き,
   微分したものを定数になるまで下に書いていく.
2. $g(x)$ を積分したものを $g_1(x)$ として,
   $f(x)$ の右に書き, 積分したものを下に書いていく.
3. 上から行ごとにかけ算してプラスマイナスを繰り返して足していく.

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + f''(x)g_3(x) - \cdots + C$$

(C は積分定数)

(話) 世間では「瞬間部分積分」「USA 式積分」などと言われている.

(補) $f(x)$ は整式でなくても式は成り立つが, 整式だと何回か微分すると定数になる.

(考) 部分積分を実際に計算するとわかる.

$f(x)$ が 1 次式のときは $f'(x)$ が定数 となるので, 部分積分を 1 回用いて

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)\,dx \\ &= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + C\end{aligned}$$

$f(x)$ が 2 次式のときは $f''(x)$ が定数 となるので, 部分積分を 2 回用いて

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)\,dx \\ &= f(x)g_1(x) - \left\{f'(x)g_2(x) - \int f''(x)g_2(x)\,dx\right\} \\ &= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + f''(x)g_3(x) + C\end{aligned}$$

これを繰り返している.

(例) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$(f(x) = x,\ g(x) = \sin 2x)$

	微分	積分
⊕	x	$-\dfrac{\cos 2x}{2}$
⊖	1	$-\dfrac{\sin 2x}{4}$

(例) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

$(f(x) = x^2,\ g(x) = \cos x)$

	微分	積分
⊕	x^2	$\sin x$
⊖	$2x$	$-\cos x$
⊕	2	$-\sin x$

（整式）×（関数）の有名な部分積分（瞬間部分積分）

$f(x)$ を整式，C を積分定数とする．

次の積分は瞬間的に部分積分ができる．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int\{(\text{整式})\times e^x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)e^x\,dx = e^x\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$

e^x でくくり，$f(x)$ を微分してプラスマイナスを繰り返してたしていく

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int\{(\text{整式})\times e^{-x}\}\,dx$ の形

$$\int f(x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

$-e^{-x}$ でくくり，$f(x)$ を微分してたしていく

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int\{(\text{整式})\times\cos x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)\cos x\,dx$$
$$= f(x)\sin x + f'(x)\cos x + f''(x)(-\sin x)+\cdots+C$$

1 項目は $\cos x$ を積分して $f(x)\sin x$,

2 項目以降は前の項の 2 つの式をそれぞれ微分してかけてたしていく

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int\{(\text{整式})\times\sin x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)\sin x\,dx$$
$$= f(x)(-\cos x) + f'(x)\sin x + f''(x)\cos x+\cdots+C$$

1 項目は $\sin x$ を積分して $f(x)(-\cos x)$,

2 項目以降は前の項の 2 つの式をそれぞれ微分してかけてたしていく

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2-2x+2)+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

（指数関数）×（三角関数）の積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int e^{-x} \sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int e^{-x} \cos x\,dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$

補 $e^x \sin x$ と $e^x \cos x$ をそれぞれ微分して考える.

考 $\boxed{1}$ $\begin{cases} (e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x & \cdots\cdots① \\ (e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x & \cdots\cdots② \end{cases}$

①－② として $\{e^x(\sin x - \cos x)\}' = 2e^x \sin x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

$\boxed{2}$ ①＋② として $\{e^x(\sin x + \cos x)\}' = 2e^x \cos x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right\}' = e^x \cos x$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} (e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x & \cdots\cdots③ \\ (e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x & \cdots\cdots④ \end{cases}$

③＋④ として $\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}' = -2e^{-x} \sin x$

$\therefore \left\{-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

$\boxed{4}$ ③－④ として $\{e^{-x}(\sin x - \cos x)\}' = 2e^{-x} \cos x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

別（部分積分法を 2 回用いる）

$\boxed{1}$ $I = \displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ とおく.

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^x \sin x\,dx \\
&= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \\
&= e^x(\sin x + \cos x) - I
\end{aligned}
$$

よって $I = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

★（指数関数）×（三角関数）の積分 Ⅱ

a，b を $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ となる定数，C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx}{a^2+b^2} + C$

考 $\boxed{1}$ $\begin{cases} (e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx & \cdots\cdots① \\ (e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & \cdots\cdots② \end{cases}$

①$\times a -$②$\times b$ として $(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$

$\displaystyle\therefore \left\{\frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}\right\}' = e^{ax}\sin bx$

$\boxed{2}$ ①$\times b +$②$\times a$ として $(be^{ax}\sin bx - ae^{ax}\cos bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$

$\displaystyle\therefore \left\{\frac{be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}\right\}' = e^{ax}\cos bx$

☆関数 $e^{ax}\left\{af(x)+f'(x)\right\}$ の積分

a を定数，C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^{x}\left\{f(x)+f'(x)\right\}dx=\int\left\{e^{x}f(x)\right\}'dx=e^{ax}f(x)+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^{ax}\left\{af(x)+f'(x)\right\}dx=\int\left\{e^{ax}f(x)\right\}'dx=e^{ax}f(x)+C$

㊢ $\boxed{1}$ $\left\{e^{x}f(x)\right\}'=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=e^{x}\left\{f(x)+f'(x)\right\}$

$\boxed{2}$ $\left\{e^{ax}f(x)\right\}'=ae^{ax}f(x)+e^{ax}f'(x)=e^{ax}\left\{af(x)+f'(x)\right\}$

補 $\boxed{2}$ で $a=1$ とすると $\boxed{1}$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^{x}(\sin x+\cos x)\,dx=\int(e^{x}\sin x)'\,dx=e^{x}\sin x+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^{3x}(3\sin x+\cos x)\,dx=\int(e^{3x}\sin x)'\,dx=e^{3x}\sin x+C$

置換積分法

$f(x)$ は連続関数，$g(x)$ は微分可能な関数かつ $g'(x)$ は連続関数とする.

$x=g(t)$ とおくとき $a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\frac{dx}{dt}=g'(t),\qquad \begin{array}{c||ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & \alpha & \to & \beta \end{array}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\,\frac{dx}{dt}dt$$

考 $F'(x)=f(x)$ とすると

$$\left\{F\big(g(t)\big)\right\}'=F'\big(g(t)\big)g'(t)=f\big(g(t)\big)g'(t)$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \left\{F\big(g(t)\big)\right\}'\,dt \\ &= \Big[\ F\big(g(t)\big)\ \Big]_\alpha^\beta \\ &= F\big(g(\beta)\big)-F\big(g(\alpha)\big) \\ &= F(b)-F(a) \\ &= \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

$\sqrt{a^2-x^2}$（$a>0$）を含む積分

$\sqrt{a^2-x^2}$（$a>0$）を含む積分は

$$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

と置換することが有効である．

㊫ 直接積分できる場合は置換しなくてよい．

㊖ $x=a\sin\theta$ とおくと

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}$$
$$=a|\cos\theta|$$

と $\sqrt{\quad}$ をはずすことができる．

㊫ $x=a\cos\theta$ と置換してもよいが，$\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$ とマイナスがでてくる．

$x=a\sin\theta$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$ でマイナスは出てこない．

㋑ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ について $x=\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，

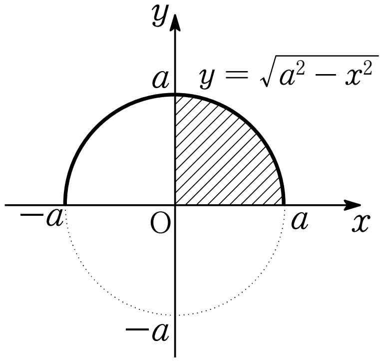
x	$0\ \to\ \frac{1}{2}$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

a を正の定数とする.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left(\text{半径}\,a\,\text{の円の面積の}\ \frac{1}{4}\,\text{倍}\right) = \frac{\pi a^2}{4}$$



㊫ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ について

$y \geqq 0$ のもとで両辺を 2 乗して $y^2=a^2-x^2$ すなわち $x^2+y^2=a^2$

このことから，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ は原点が中心，半径が a の上半円

㊮ $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left(\text{半径}\,a\,\text{の円の面積の}\frac{1}{2}\text{倍}\right) = \frac{\pi a^2}{2}$

㊫ $x=a\sin\theta$ と置換しても値は求まる.

㊫ 関数 $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分は円の一部の面積から値が求まる.

$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ を含む積分

$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ を含む積分は

$$x = a\tan\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

と置換することが有効である.

(補) 直接積分できる場合は置換しなくてよい.

(考) 公式 $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を使う.

$x = a\tan\theta$ とおくと

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta} = \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta}$$

置換すると $\cos^2\theta$ が消えてくれる.

(例) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ について　$x = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

偶関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 偶関数（ぐうかんすう）という．

偶関数 $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

㊥ 関数 $f(x)=\cos x$ について $\cos(-x)=\cos x$ より $f(-x)=f(x)$ を満たす．
すなわち，$\cos x$ は偶関数である．

㊟ x^2，x^4，$\cos x$，$|x|$，3，$\cdots$ は偶関数

奇関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 奇関数（きかんすう）という．

奇関数 $y=f(x)$ のグラフは 原点に関して対称である．

㊥ 関数 $f(x)=\sin x$ について $\sin(-x)=-\sin x$ より $f(-x)=-f(x)$ を満たす．
すなわち，$\sin x$ は奇関数である．

㊟ x，x^3，$\sin x$，$\tan x$，$\cdots$ は奇関数

偶関数と奇関数の積

$\boxed{1}$ $f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とするとき $f(x)g(x)$ は 奇関数 である.

$\boxed{2}$ $f(x)$，$g(x)$ をともに偶関数とするとき $f(x)g(x)$ は 偶関数 である.

$\boxed{3}$ $f(x)$，$g(x)$ をともに奇関数とするとき $f(x)g(x)$ は 偶関数 である.

注 整数では (偶数)×(奇数)=(偶数)，(奇数)×(奇数)=(奇数) となるが，これとは違う.

考 $\boxed{1}$ $f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\{-g(x)\}=-f(x)g(x)=-F(x)$$

よって $F(x)$ は奇関数

$\boxed{2}$ $f(x)$，$g(x)$ をともに偶関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$$

よって $F(x)$ は偶関数

$\boxed{3}$ $f(x)$，$g(x)$ をともに奇関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=\{-f(x)\}\{-g(x)\}=f(x)g(x)=F(x)$$

よって $F(x)$ は偶関数

例 x^2 は偶関数，x は奇関数である.

$\boxed{1}$ $x^2\cdot x=x^3$ は奇関数

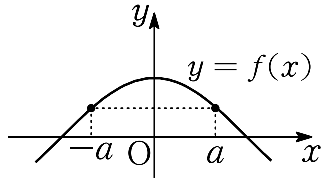
$\boxed{2}$ $x^2\cdot x^2=x^4$ は偶関数

$\boxed{3}$ $x\cdot x=x^2$ は偶関数

偶関数・奇関数の定積分

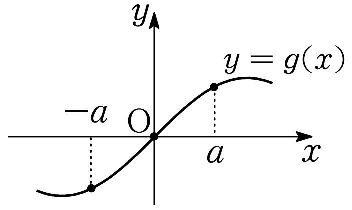
$\boxed{1}$ $f(x)$ が偶関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$\boxed{2}$ $g(x)$ が奇関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$$



$\boxed{3}$ $f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が奇関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} \{f(x)+g(x)\}\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

㊓ 面積を考えるとわかる．

㋕ $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ について $x=-t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$-a$	→	0
t	a	→	0

$f(x)$ は偶関数であるから　$f(-t)=f(t)$ であることに注意して

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,\frac{dx}{dt}\,dt = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-a}^{0} g(x)\,dx$ について $x=-t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$-a$	→	0
t	a	→	0

$f(x)$ は奇関数であるから　$g(-t)=-g(t)$ であることに注意して

$$\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{a}^{0} g(-t)\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{a}^{0} g(t)\,dt = -\int_{0}^{a} g(t)\,dt = -\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

よって

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = -\int_{0}^{a} g(x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = 0$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

㋫ $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\,dx = 0$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + x^3\cos x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

★ $f(x)=$（偶関数）＋（奇関数）

関数 $f(x)$ について

$\boxed{1}$ $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ は 偶関数 である．

$\boxed{2}$ $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ は 奇関数 である．

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

すなわち

$f(x)=$（偶関数）＋（奇関数）

と表すことができる．

$\boxed{4}$ a を定数として

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\left\{\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right\}dx$$
$$=2\int_{0}^{a}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx$$

考 $\boxed{1}$ $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ すると

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$$

よって．$g(x)$ は偶関数である．

$\boxed{2}$ $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ すると

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$$

よって．$h(x)$ は奇関数である．

$\boxed{3}$ $f(x)$ は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の和に等しい．

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ をふまえ，$\boxed{\text{偶関数・奇関数の定積分}}$を考える．

例 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x+1}$ について

$\boxed{1}$
$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{e^x+1}+\frac{(-x)^2}{e^{-x}+1}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{e^x+1}+\frac{x^2e^x}{1+e^x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{x^2}{2}$$

これは偶関数である．

$\boxed{2}$
$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{e^x+1}-\frac{(-x)^2}{e^{-x}+1}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{e^x+1}-\frac{x^2e^x}{1+e^x}\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

これは奇関数である．

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

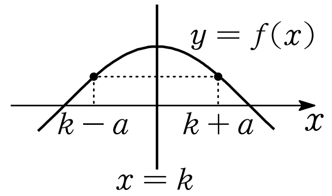
$\boxed{4}$
$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)dx=2\int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1=\frac{1}{3}$$

グラフの対称性と定積分

連続関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 a について

$\boxed{1}$ $y=f(x)$ のグラフが

直線 $x=k$ に関して対称なとき



$$\int_{k-a}^{k} f(x)\,dx=\int_{k}^{k-a} f(x)\,dx$$

であることから

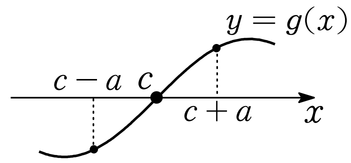
$$\int_{k-a}^{k+a} f(x)\,dx=2\int_{k-a}^{k} f(x)\,dx$$

あるいは

$$\int_{k-a}^{k+a} f(x)\,dx=2\int_{k}^{k+a} f(x)\,dx$$

$\boxed{2}$ $y=g(x)$ のグラフが

x 軸上の点 $(c,\ 0)$ に関して対称なとき



$$\int_{c-a}^{c+a} g(x)\,dx=0$$

補 $k=0$ の場合は 偶関数・奇関数の定積分

補 $\boxed{1}$ $y=f(x)$ のグラフが直線 $x=k$ に関して対称なとき $f(x)=f(2k-x)$

$\boxed{2}$ $y=g(x)$ のグラフが点 $(c,\ 0)$ に関して対称なとき $g(c-x)=-g(c+x)$

考 置換積分や平行移動で示せるが，グラフから判断できる．

$\boxed{2}$ について，大雑把な説明をすると

$g(x)\geqq 0$ の部分と $g(x)\leqq 0$ の部分の面積が等しいので打ち消し合って 0 になる．

$g(x)\geqq 0$ の部分が利益で $g(x)\leqq 0$ の部分が負債として，残高 0 という感じ．

例 $\boxed{1}$ $y=(x-1)^2$ のグラフは直線 $x=1$ に関して対称であるから

$$\int_0^1 (x-1)^2\,dx=\int_1^2 (x-1)^2\,dx$$

であることから

$$\int_0^2 (x-1)^2\,dx=2\int_0^1 (x-1)^2\,dx=2\int_1^2 (x-1)^2\,dx$$

$\boxed{2}$ $y=(x-1)^3$ のグラフは点 $(1,\ 0)$ に関して対称であるから

$$\int_0^2 (x-1)^3\,dx=0$$

$y=\cos x$ のグラフは点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であるから

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx=0$$

☆定積分の等式

連続関数 $f(x)$ と定数 a について

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

補 図形的には $y=f(x)$ と $y=f(a-x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{a}{2}$ に関して対称

考 $I=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

$J=\displaystyle\int_0^a f(a-x)\,dx$

とおく．

J で $a-x=t$ すなわち $x=a-t$ と置換すると

x	0	$\to$	a
t	a	$\to$	0

$\dfrac{dx}{dt}=-1$

$$J=\int_a^0 f(t)\frac{dx}{dt}\,dt=-\int_a^0 f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=I$$

よって $I=J$

別 $F'(x)=f(x)$ とすると

$$I=\int_0^a f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_0^a=F(a)-F(0)$$

$$J=\int_0^a f(a-x)\,dx=\Big[\,-F(a-x)\,\Big]_0^a=-F(0)+F(a)$$

よって $I=J$

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ を求める．

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ とすると $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \qquad \leftarrow a=\frac{\pi}{2}$$

であることから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

ここで $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$

とおくと

$I=J$ ……①

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

すなわち $I+J=\dfrac{\pi}{2}$ ……②

①，② より $I=J=\dfrac{\pi}{4}$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{\pi}{4}$

補 これを一般化したものに King Property がある．

★キングプロパティ（King Property）

連続関数 $f(x)$ と定数 a，b について

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

補 図形的には $y=f(x)$ と $y=f(a+b-x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{a+b}{2}$ に関して対称

考 $$I=\int_a^b f(x)\,dx$$
$$J=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$
とおく．

J で $a+b-x=t$ すなわち $x=a+b-t$ と置換すると

x	a	$\to$	b
t	b	$\to$	a

$\dfrac{dx}{dt}=-1$

$$J=\int_b^a f(t)\,\frac{dx}{dt}dt=-\int_b^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt=I$$
よって $I=J$

別 $F'(x)=f(x)$ とすると
$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$
$$J=\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\Big[\,-F(a+b-x)\,\Big]_a^b=-F(a)+F(b)$$
よって $I=J$

例 $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx$ を求める．

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$ とすると $f(3-x)=\dfrac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 f(3-x)\,dx \qquad \leftarrow a=1,\ b=2$$
であることから
$$\int_1^2\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx=\int_1^2\frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx$$
ここで $I=\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx$，$J=\displaystyle\int_1^2\frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx$

とおくと
$$I=J \quad \cdots\cdots①$$
$$I+J=\int_1^2\frac{x^2+(3-x)^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx=\int_1^2 dx=\Big[\,x\,\Big]_1^2=1$$
すなわち $I+J=1$ ……②

①，② より $I=J=\dfrac{1}{2}$

よって $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx=\frac{1}{2}$

分母を展開して $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{2x^2-6x+9}\,dx=\frac{1}{2}$ もわかる．

$I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ の漸化式

n を自然数として

$$I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx \text{ とおくと } I_{n+1}=e-(n+1)I_n$$

㊔ $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx=\Big[\,x^{n+1}e^x\,\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n e^x\,dx$（∵ 部分積分法）

$\quad =e-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

よって $\boldsymbol{I_{n+1}=e-(n+1)I_n}$

㊎ $I_1=\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[\,e^x(x-1)\,\Big]_0^1=1$

$I_2=e-2I_1=e-2\cdot 1=e-2$

$I_3=e-3I_2=e-3(e-2)=-2e+6$

$I_4=e-4I_3=e-4(-2e+6)=9e-24$

$I_5=e-5I_4=e-5(9e-24)=-44e+120$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2,\quad \int_0^1 x^3e^x\,dx=-2e+6$$

$$\int_0^1 x^4e^x\,dx=9e-24,\quad \int_0^1 x^5e^x\,dx=-44e+120$$

㊓ （整式）×（関数）の有名な部分積分（瞬間部分積分）から直接計算することもできる．

$$\int_0^1 x^5e^x\,dx=\Big[\,e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)\,\Big]_0^1=-44e+120$$

㊩

定積分の漸化式は基本的に部分積分で変形する．

㊓ ほとんどが部分積分で変形するが，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ の漸化式 など例外もある．

$I_n=\int_0^1(\log x)^n\,dx$ の漸化式

n を 1 以上の整数として

$$I_n=\int_1^e(\log x)^n\,dx \text{ とおくと } I_{n+1}=e-(n+1)I_n$$

考 $I_{n+1}=\int_1^e(\log x)^{n+1}\,dx=\int_1^e 1\cdot(\log x)^{n+1}\,dx$

$=\Big[\,x(\log x)^{n+1}\,\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx$（∵ 部分積分法）

$=e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n\,dx$

よって $\boldsymbol{I_{n+1}=e-(n+1)I_n}$

例 $I_1=\int_1^e(\log x)^n\,dx=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^e=1$

$I_2=e-2I_1=e-2\cdot 1=e-2$

$I_3=e-3I_2=e-3(e-2)=-2e+6$

$I_4=e-4I_3=e-4(-2e+6)=9e-24$

$I_5=e-5I_4=e-5(9e-24)=-44e+120$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_1^e(\log x)^2\,dx=e-2,\ \int_1^e(\log x)^3\,dx=-2e+6$$

$$\int_1^e(\log x)^4\,dx=9e-24,\ \int_1^e(\log x)^5\,dx=-44e+120$$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ の漸化式

n を 0 以上の整数として

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \text{ とおくと } I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

㊫
$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n+1}x\,dx\\
&=\Big[-\cos x\cdot\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-\cos x\cdot(n+1)\sin^n x\cdot\cos x\}\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^n x\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx\\
&=(n+1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\right\}\\
&=(n+1)(I_n-I_{n+2})\end{aligned}$$

$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ すなわち $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

㊷ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I_2=\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

$I_3=\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{2}{3}\cdot1=\dfrac{2}{3}$

$I_4=\dfrac{3}{4}I_2=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{16}\pi$

$I_5=\dfrac{4}{5}I_3=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot I_1=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot1=\dfrac{8}{15}$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{16}\pi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\frac{8}{15}$$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ の漸化式

n を 0 以上の整数として

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx \quad \text{とおくと} \quad I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

㊂
$$\begin{aligned}
I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos^{n+1}x\,dx\\
&=\Big[\sin x\cdot\cos^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin x\cdot(n+1)\cos^n x\cdot(-\sin x)\}\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^n x\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx\\
&=(n+1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}x\,dx\right\}\\
&=(n+1)(I_n-I_{n+2})
\end{aligned}$$

$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ すなわち $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

㊀ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I_2=\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

$I_3=\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}$

$I_4=\dfrac{3}{4}I_2=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{16}\pi$

$I_5=\dfrac{4}{5}I_3=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot I_1=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{8}{15}$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{4},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=\frac{3}{16}\pi,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx=\frac{8}{15}$$

㊓ $\boxed{I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \text{ の漸化式}}$ と同じ漸化式

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ と置換するなどでわかる

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ の漸化式

n を 0 以上の整数として

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくと $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

考 $I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan^n x-\tan^n x\right)dx=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n$

$=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

よって $\boldsymbol{I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n}$

例 $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\log 2}{2}$

$I_2=1-I_0=1-\dfrac{\pi}{4}$

$I_3=\dfrac{1}{2}-I_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\log 2}{2}$

$I_4=\dfrac{1}{3}-I_2=\dfrac{1}{3}-\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$

$I_5=\dfrac{1}{4}-I_3=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\log 2}{2}\right)=\dfrac{\log 2}{2}-\dfrac{1}{4}$

このことから，次の定積分が求まっている．

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2 x\,dx=1-\frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^3 x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{\log 2}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^4 x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^5 x\,dx=\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{4}$

☆定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$

m，n を 0 以上の整数として

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

㊔ m，n を 0 以上の整数として　$B(m,\,n)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ とおく．

$$\begin{aligned}B(m+n,\,0)&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx=\left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta\\&=\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}B(m,\,n)&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx\\&=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}\,dx\\&=-\frac{n}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx\end{aligned}$$

すなわち　$\boldsymbol{B(m,\,n)=-\dfrac{n}{m+1}B(m+1,\,n-1)}$

これを繰り返して

$$\begin{aligned}B(m,\,n)&=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)B(m+2,\,n-2)\\&=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)B(m+n,\,0)\\&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\,\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\qquad(\because ①)\\&=\boldsymbol{(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}\end{aligned}$$

㊒ 数 Ⅱ で出てくる積分公式の一般化になっている．

$$B(1,\,1)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=(-1)\frac{1!1!}{3!}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$B(1,\,2)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=(-1)^2\frac{1!2!}{4!}(\beta-\alpha)^4=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$B(2,\,1)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=(-1)\frac{1!2!}{4!}(\beta-\alpha)^4=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$B(2,\,2)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=(-1)^2\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

㊓ 次のように $(-1)^n$ をなくす変形もある．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

㊓ $\alpha=0$，$\beta=1$ として

$$\int_0^1 x^m(x-1)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

逆関数の定積分

関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)>0$ とする.

関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

考 $y=f(x)$ とおくと $x=g(y)$

y	$f(a)$	$\to$	$f(b)$
x	a	$\to$	b

$$\begin{aligned}\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx&=\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy\ （\because \text{積分する変数} x \text{を} y \text{にした}）\\&=\int_a^b x\,\frac{dy}{dx}\,dx\ （\because \text{置換積分}）\\&=\int_a^b x\,f'(x)\,dx\\&=\Big[\,xf(x)\,\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\,dx\quad （\because \text{部分積分法}）\\&=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a)$

補 $0<a<b$ かつ $0<f(a)<f(b)$ ならば 右の図のようになる.

面積を考えると

$$\int_a^b f(x)\,dx=S$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy=T$$

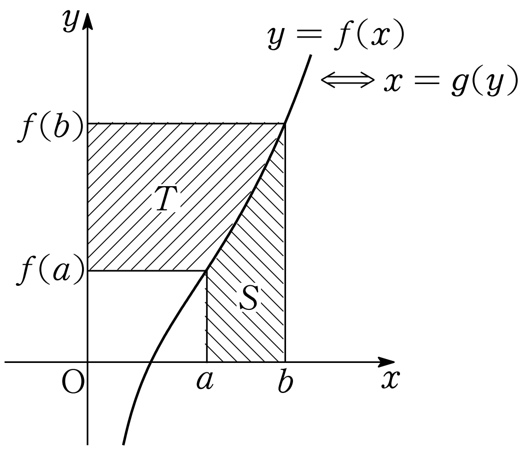
$S+T$ は

2 辺の長さが b，$f(b)$ の長方形の面積から

2 辺の長さが a，$f(a)$ の長方形の面積をひく

ことで求まる.

すなわち $S+T=bf(b)-af(a)$



区分求積法

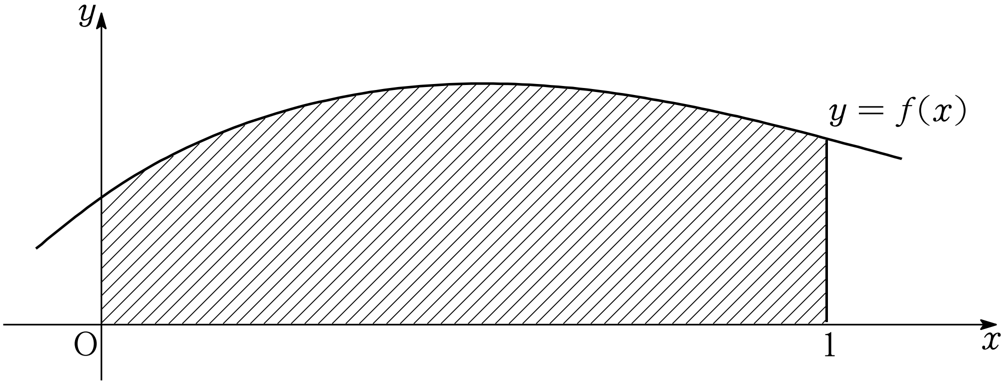
和の極限値として面積や体積を求める方法を 区分求積法（くぶんきゅうせきほう） という.

和の極限と定積分 I

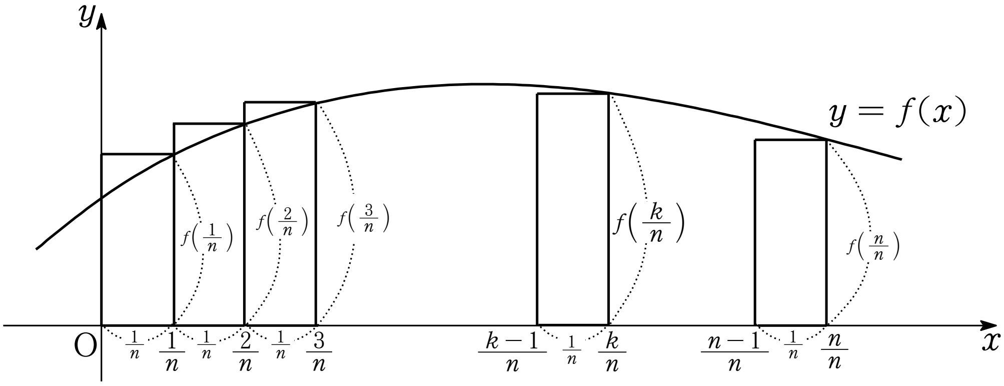
閉区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

考 $0 \leqq x \leqq 1$ となる区間で曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた下図斜線部の面積を考える.
（横幅をだいぶ広くとっているが気にせずに）



$0 \leqq x \leqq 1$ の区間を n 等分して横幅が $\dfrac{1}{n}$，高さが $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の n 個の長方形を作ると



それら n 個の長方形の面積をたしあわせると

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)&=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすると長方形の幅が限りなく 0 になり，これらは面積に収束する.

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

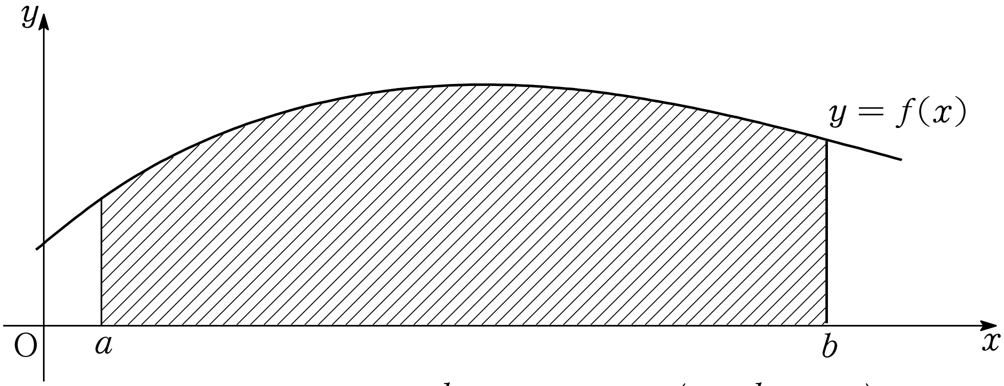
例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

★区分求積法の等式

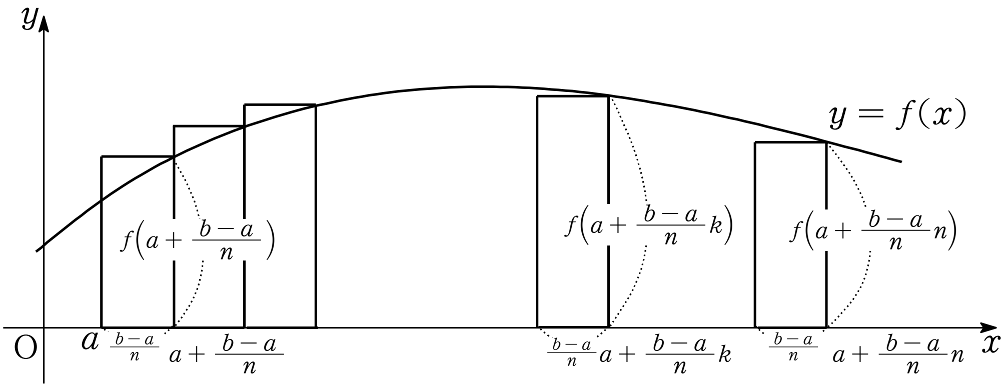
閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

㊂ $a \leqq x \leqq b$ となる区間で曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた下図斜線部の面積を考える．



$a \leqq x \leqq b$ の区間を n 等分して横幅が $\dfrac{b-a}{n}$, 高さが $f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の n 個の長方形を作ると



それら n 個の長方形の面積をたしあわせると

$$\frac{b-a}{n}\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{b-a}{n}n\right)\right\}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

$n\to\infty$ とすると長方形の幅が限りなく 0 になり，これらは面積に収束する．

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$

㊟ $f(x)\geqq 0$ としなくてもこの定理は成り立つ．

㊓ $a=0,\ b=1$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

㊓ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)\,dx$

㊓ 長方形の右上の頂点が $y=f(x)$ 上にあるとしたが，長方形の左上の頂点が $y=f(x)$ 上にあるとしても同様である．

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$ としてもよい．

㊕ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{n}k\right)^2=2\int_1^3 x^2\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_1^3=\frac{1}{3}(3^3-1^3)=\frac{26}{3}$ ← $a=1,\ b=3$

和の極限と定積分 II

閉区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

㊔ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ と同じこと．Σ が少しずれても結果は同じ．

㊀ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

☆和の極限と定積分の準公式

閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=an+p}^{bn+q}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ただし a，b，p，q は整数

㊋ $a=0$，$b=1$ の場合を押さえておけばよいが，念のため．

㊞ $n\to\infty$ とすると，次のイメージ．

$$\frac{1}{n}\to dx$$

$$\sum_{k=an+p}^{bn+q}\to\int_a^b \quad \text{たとえば}\quad \sum_{k=1}^{n}\to\int_0^1,\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\to\int_0^1 \qquad \sum_{k=n+1}^{2n}\to\int_1^2$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right)\to f(x)$$

㊀ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=5}^{n+3}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

㊀ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$

定積分と不等式（積分評価）I

閉区間 $[a,\ b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$ が

つねに $f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

等号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ が成り立つのは 恒等的に $f(x) = 0$

㊓ $f(x)$ がつねに 0 以上ならば積分しても 0 以上ということ．

㊓ 等号が成り立つのは $a = b$ となる場合もあるが，ここでは $a < b$ としている．

㊀ $0 \leqq x \leqq 1$ において $2x^3 \geqq 0$ であるから $\displaystyle\int_0^1 2x^3\,dx \geqq 0$

定積分と不等式（積分評価）II

閉区間 $[a,\ b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$，$g(x)$ が

つねに $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

等号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つのは 恒等的に $f(x) = g(x)$

㊓ 積分は大小関係を保つ．

㊓ 面積をイメージするとよいが，$f(x)$，$g(x)$ が負の値をとっても成り立つ．

㊂ $[a,\ b]$ $(a < b)$ において つねに $f(x) \geqq g(x)$ ならば $f(x) - g(x) \geqq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \geqq 0$$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

等号が成り立つのは $f(x) - g(x) = 0$ すなわち $f(x) = g(x)$

㊀ $0 \leqq x \leqq 1$ において $x \geqq x^2$ であるから $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \geqq \int_0^1 x^2\,dx$

絶対値と定積分の不等式

閉区間 $[a,\, b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$ が次を満たす.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \left|\int_a^b \{f(x)\}\,dx\right|$$

等号 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b \{f(x)\}\,dx\right|$ が成り立つのは

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x)$ の正負が変わらない場合に限る.

㊁ 面積を考える.

㊂ $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ の正負が変わらない」とは

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」のこと.

㊄ $\displaystyle\int_0^1 |x|\,dx \geqq \left|\int_0^1 x\,dx\right|$

$0 \leqq x \leqq 1$ で常に $|x| \geqq 0$ であるから $\displaystyle\int_0^1 |x|\,dx = \left|\int_0^1 x\,dx\right|$

絶対値と定積分の不等式 II

閉区間 $[a,\, b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$, $g(x)$ が次を満たす.

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \geqq \left|\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx\right|$$

等号 $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx\right|$ が成り立つのは

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない場合に限る.

㊁ 面積を考える.

㊂ $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない」とは

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq g(x)$」のこと.

㊄ $\displaystyle\int_0^1 |x - x^2|\,dx \geqq \left|\int_0^1 (x - x^2)\,dx\right|$

$0 \leqq x \leqq 1$ でつねに $x \geqq x^2$ であるから $\displaystyle\int_0^1 |x - x^2|\,dx = \left|\int_0^1 (x - x^2)\,dx\right|$