数学Ⅲ　微分法

教科書の「微分法」「微分法の応用」をまとめています.

微分係数 / 続・微分係数 / 微分可能 / 関数の連続 / 微分可能と連続 Ⅰ /
微分可能と連続 Ⅱ / 区間で微分可能 / 導関数の定義 / ★導関数の増分 /
導関数の表記 / 微分する / 関数 x^n (n は正の整数) の導関数 /
定数関数の導関数 / 和・差・実数倍の微分 / 積の微分 / 商の微分 /
関数 x^k (k は整数) の導関数 / ★関数 x^k (k は整数) の定義域 /
合成関数の微分法 / 逆関数の微分法 / 関数 x^p(p は有理数) の導関数 /
★関数 $x^{\frac{m}{n}}$ の定義域 / 関数 x^p (p は有理数) の合成関数の導関数 /
☆導関数の準公式 / ☆合成関数の導関数の準公式 / 三角関数の導関数 /
三角関数の合成関数の導関数 / 自然対数の底 /
$x \to 0$ の関数 $\dfrac{\log(1+x)}{x}$ の極限 / $x \to 0$ の関数 $\dfrac{e^x-1}{x}$ の極限 /
対数関数の導関数 / 対数関数の合成関数の導関数 /
定義域を広げた対数関数の導関数 /
定義域を広げた対数関数の合成関数の導関数 / 指数関数の導関数 /
指数関数の合成関数の導関数 / 対数微分法 / ★関数 x^α (α は実数) の導関数 /
関数 x^α(α は無理数) の定義域 / 関数 x^α (α は実数) の合成関数の導関数 /
☆ $e^{ax}f(x)$ の導関数 / 陰関数 / 陰関数の導関数 / 高次導関数 /
媒介変数で表された関数の導関数 / 接線の傾き / 接線の方程式 /
法線の方程式 / 2曲線が接する条件 / ★ロルの定理 / 平均値の定理 /
★平均値の定理 Ⅱ / 単調増加関数・単調減少関数 /
導関数の符号と関数の増減 / 極値 / 極値と微分係数 / 曲線の凹凸 /
第2次導関数 $f''(x)$ の符号と曲線凹凸 / 変曲点 / $y=f(x)$ 変曲点 /
関数の増減表の記号 / 第2次導関数の値の符号と極値 / 極限と漸近線 /
関数 $y=f(x)$ のグラフの概形の考察 /
数直線上の動点の速度・速さ・加速度 /
座標平面上の動点の速度・速さ・加速度 /
媒介変数で表された曲線の増減表の記号 / ☆安田の定理 /
★関数の1次近似 / ★テーラー展開 (Taylor expanshion) /
★マクローリン展開 (Maclaurin expanshion) /
★コーシーの平均値の定理 / ★ロピタルの定理 / ★ロピタルの定理の一部 /

微分係数

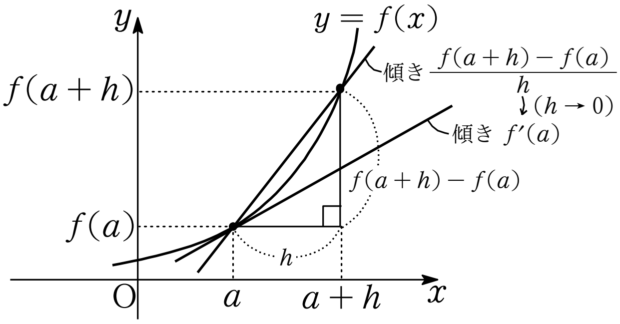
x の値が a から $a+h$ まで変わるときの

関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

h を限りなく 0 に近づけたとき



この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における 微分係数（びぶんけいすう） といい $f'(a)$ で表す.

すなわち

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

Ⓖ 微分係数とグラフ

続・微分係数

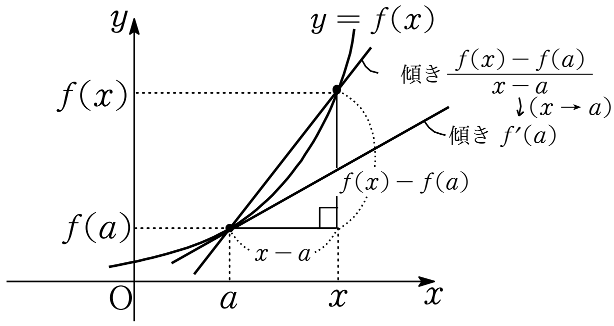
関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

$a+h=x$ とおくと $h=x-a$

$h\to 0$ と $x\to a$ は同じであることから



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

すなわち　$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例 $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

微分可能

関数 $f(x)$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在する

すなわち

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ が存在する

あるいは

$$\lim_{h\to 0}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ が存在する

ことを $f(x)$ は $x=a$ で **微分可能**（びぶんかのう）である という．

㊎ $f(x)=x^2$ について

$$\lim_{h\to\infty}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)$$
$$=2$$

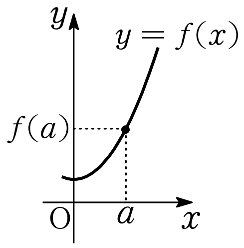
$\lim_{h\to\infty}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ が存在するので，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である．

□関数の連続

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a において

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で **連続**（れんぞく）であるという．



㊎ $f(x)=x^2$ について $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x^2=1^2=f(1)$

$f(x)$ は $x=1$ で連続である．

微分可能と連続 Ⅰ

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x=a$ で連続である．

考 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f'(a)$ が存在して $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)+f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right\}\\&=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)\end{aligned}$$

例 $f(x)=x^2$ は $x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ は $x=1$ で連続である．

微分可能と連続 Ⅱ

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとは限らない．

すなわち

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続ならば

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能ではないことがある．

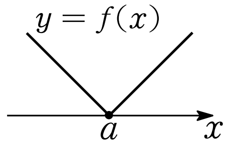
㊟補 $\boxed{\text{微分可能と連続 Ⅰ}}$ の逆は成り立たない．

㊟考 $f(x)=|x-a|$ を考えると $f(a)=0$ であり

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0=f(a)$ であるから $f(x)$ は $x=a$ で連続である．

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1 \quad \cdots\cdots②$$



① ≠ ② であるから $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は存在しない．

すなわち $f(x)$ は $x=a$ で連続であるが $x=a$ で微分可能ではない．

区間で微分可能

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての x の値で微分可能であるとき

$f(x)$ は 区間 I で微分可能である という．

このとき，$f(x)$ は区間 I で連続 である．

例 $f(x)=x^2$ は区間 $1<x<3$ のすべての x の値で微分可能であるから

$f(x)$ は区間 $1<x<3$ で微分可能である．

このとき，$f(x)$ は区間 $1<x<3$ で連続である．

注 $f(x)$ が区間 I で連続であっても，$f(x)$ は区間 I で微分可能とは限らない．

導関数の定義

関数 $y=f(x)$ において

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の **導関数**（どうかんすう） という.

㊟例 $f(x)=x^2$ について

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \end{aligned}$$

このとき $x=a$ とすると $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a$

これは $f(x)$ の $x=a$ における微分係数である.

㊟補 導関数 $f'(x)$ の x の値を定めると，微分係数になる.

導関数の増分

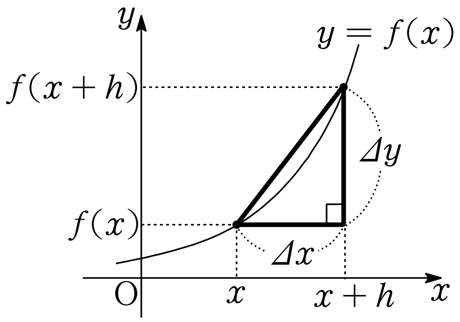
関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

h を x の増分（ぞうぶん）といい Δx と表す.

$f(x+h)-f(x)$ を y の増分（ぞうぶん） といい Δy と表す.

すなわち

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$



㊟補 $\Delta x\to 0$ のとき $f'(x)\fallingdotseq\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

導関数の表記

$y=f(x)$ の導関数を表わす記号として

$$f'(x),\ \{f(x)\}',\ \bigl(f(x)\bigr)',\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

などが用いられる．

㊀ x の関数 x^2 の導関数は $2x$ であることを表すのに

$(x^2)'=2x$

$f(x)=x^2$ の導関数は　$f'(x)=2x$，$\dfrac{d}{dx}f(x)=2x$

$y=x^2$ の導関数は　$y'=2x$，$\dfrac{dy}{dx}=2x$

□微分する

微分可能な x の関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを

$f(x)$ を x で 微分（びぶん）する という．

㊀ $f(x)=x^2$ の導関数は $f'(x)=2x$

$f(x)=x^2$ を x で微分すると $2x$

□関数 x^n（n は正の整数）の導関数

n が正の整数のとき

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

㊟考 $f(x) = x^n$ について

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h} \quad (\because \text{二項定理}) \\
&= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 h + \cdots + h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

㊟例 $(x)' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^4)' = 4x^3$

□定数関数の導関数

c を定数とすると　$(c)' = 0$

㊟考 $f(x) = c$ について

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0$$

㊟補 定数を微分すると 0 になる.

㊟例 $(3)' = 0$

□和・差・実数倍の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$\boxed{1}$ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\boxed{2}$ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\{k\,f(x)\}'=k\,f'(x)$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\{s\,f(x)+t\,g(x)\}'=s\,f'(x)+t\,g'(x)$$

考 $F(x)=sf(x)+tg(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{sf(x+h)+tg(x+h)-\{sf(x)+tg(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{s\{f(x+h)-f(x)\}+t\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{s\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+t\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\&=sf'(x)+tg'(x)\end{aligned}$$

例 $\boxed{1}$ $(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'=3x^2+2x$

$\boxed{2}$ $(x^3-x^2)'=(x^3)'-(x^2)'=3x^2-2x$

$\boxed{3}$ $(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot2x=6x$

$(4x^3+3x^2)'=4(x^3)'+3(x^2)'=4\cdot3x^2+3\cdot2x=12x^2+6x$

積の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\left\{f(x)g(x)\right\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

㊟ $\left\{f(x)g(x)\right\}' = f'(x)g'(x)$ とするのは間違い．

(補) 2 つの関数の積の微分は一方だけを微分して他方をかけてたしあわせる．

(考) $F(x) = f(x)g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

㊕ $y = x^2(x^2+1)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2)'(x^2+1) + x^2(x^2+1)' \\
&= 2x(x^2+1) + x^2 \cdot 2x \\
&= 4x^3 + 2x
\end{aligned}$$

ちなみに，展開して $y = x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$ を微分しても同じになる．

商の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$\boxed{1}$ $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\boxed{2}$ $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

注 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ とするのは間違い．

考 $\boxed{1}$ $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で $f(x) = 1$ として $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = \dfrac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

例 $\boxed{1}$ $y = \dfrac{x}{x+1}$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $y = \dfrac{1}{x+1}$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{関数 } x^k\ (k \text{ は整数}) \text{ の導関数}}$

k が整数のとき

$$\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$$

㊢ k が正の整数ならば $\boxed{\text{関数 } x^n\ (n \text{ は正の整数}) \text{ の導関数}}$ より成り立つ．

$k=0$ ならば $\boxed{\text{定数関数の導関数}}$ を考えて $(x^0)'=(1)'=0$

k が負の整数ならば　$k=-n$（n は正の整数）とおけて

$$\begin{aligned}(x^k)' &= (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} \quad (\because \boxed{\text{商の微分}})\\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{(-n)-1}\\ &= kx^{k-1} \quad (\because -n=k)\end{aligned}$$

㊞ $(x^{-2})' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

★関数 x^k (k は整数) の定義域

関数 $f(x) = x^k$ (k は 0 以外の整数) の定義域について

$\boxed{1}$ $k > 0$ のとき

$f(x)$ の定義域は 実数全体

$\boxed{2}$ $k < 0$ のとき

$f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

注 $k = 0$ ならば $f(x) = x^0 = 1$ と定数関数になる．
定義域は，$x > 0$ の場合は $x^0 = 1$ は普通に言えるが，$x \leqq 0$ の場合は微妙である．
$x = 2$ の場合は $f(2) = 2^0 = 1$ は問題ない．
$x = 0$ の場合は $f(0) = 0^0$ となり，明確に 1 にすることはできない．
ただ，$0^0 = 1$ と定義することもある．
$x = -1$ の場合は $f(-1) = (-1)^0$ となり，これも 1 にするのは気がひける．
$k = 0$ のときの定義域は問題によりけりなので，ここでは定義域はかかない．

例 $\boxed{1}$ $f(x) = x^2$ の定義域は実数全体
$\boxed{2}$ $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ の定義域は $x \neq 0$

合成関数の微分法

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が微分可能であるとき，

合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ も微分可能であり，x で微分すると

$$y'=\left\{f\big(g(x)\big)\right\}'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

とくに

$$u=g(x)$$

とおくと

$$y=f(u)$$

であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

㋕ $u=g(x)$ において，x の増分 $\varDelta x$ に対する u の増分を $\varDelta u$

$y=f(u)$ において，u の増分 $\varDelta u$ に対する y の増分を $\varDelta y$

とすると

$u=g(x)$ は連続であるから，$\varDelta x\to 0$ のとき $\varDelta u=g(x+\varDelta x)-g(x)\to 0$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\\&=\lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\frac{\varDelta u}{\varDelta x}\right)\\&=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x}\\&=\lim_{\varDelta u\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{dy}{dx}=y'$，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ であることから

$$\begin{aligned}y'&=f'(u)g'(x)\\&=f'\big(g(x)\big)g'(x)\end{aligned}$$

㊀例 $y=(x^2+1)^3$ を x で微分する．

$$\begin{aligned}y'&=\left\{(x^2+1)^3\right\}'=3(x^2+1)^2(x^2+1)'=3(x^2+1)^2\cdot 2x\\&=6x(x^2+1)^2\end{aligned}$$

$u=x^2+1$ とおくと　$y=u^3$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 2x=3(x^2+1)^2\cdot 2x\\&=6x(x^2+1)^2\end{aligned}$$

㊣補 $u=g(x)$ と置かずに直接微分できるようにしたい．

逆関数の微分法

関数 $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ が存在し，$g(x)$ が微分可能であるとする．

$y=f(x)$ を x について解いて　$x=g(y)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\ \frac{dx}{dy}=g'(y)$$

と表わすと

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\quad \text{ただし}\quad \frac{dx}{dy}\neq 0$$

㊂右図のような $y=f(x)$，$x=g(y)$ を考える．

$y+k=f(x+h)$，$x+h=g(y+k)$

$\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+h,\ f(x+h))$

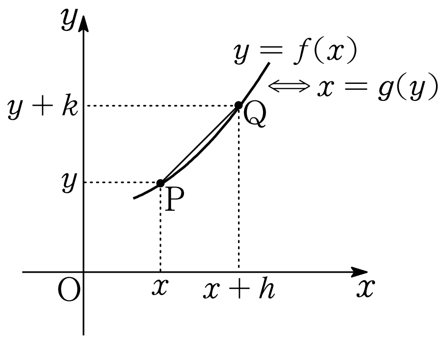
または　$\mathrm{P}(g(y),\ y)$，$\mathrm{Q}(g(y+h),\ y+k)$

直線 PQ の傾きを 2 通りで表して

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{g(y+h)-g(y)}$$

すなわち　$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\dfrac{g(y+h)-g(y)}{k}}$

$h\to 0$ とすると　$k\to 0$ であるから　$f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$



㊇ $y=f(x)$ を x で微分して　$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ ……①

$x=g(y)$ を x で微分して　$1=g'(y)\dfrac{dy}{dx}$

$$=g'(y)f'(x)\ (\because ①)$$

よって　$f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$

㊥ $y=x^{\frac{1}{3}}$ を x で微分する．

$x=y^3$　より　$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ (x\neq 0)$$

関数 x^p（p は有理数）の導関数

p が有理数のとき

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}$$

㊂ p は有理数なので　$p = \dfrac{m}{n}$（m，n は整数，$n \geqq 1$）とおける．

$y = x^p = x^{\frac{m}{n}}$　とすると　$y^n = x^m$

両辺を x で微分して　$ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$

すなわち　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \dfrac{mx^{m-1}}{n(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}} = \dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{x^{m-1}}{x^{1-\frac{m}{n}}} = \dfrac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$

よって　$\dfrac{m}{n} = p$ より　$\dfrac{dy}{dx} = px^{p-1}$

㊉ p が 0 以上の整数のときは数学 II で学習済

$(x^3)' = 3x^2$ となる整数 3 が整数ではない有理数になっても微分できるということ．

㊅ $(x^{\frac{4}{3}})' = \dfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

㊉ 教科書では逆関数の微分を使って示しているが，それだと逆関数の存在を考えて定義域は $x > 0$ となる必要がある．

実際は p によって，定義域が違うので注意したい．

念のため $\boxed{\text{関数 } x^{\frac{m}{n}} \text{ の定義域}}$ に確認で書いておく．

★関数 $x^{\frac{m}{n}}$ の定義域

関数 $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$（m，n は互いに素な整数，$m \neq 0$，$n \geqq 1$）

の定義域について

$\boxed{1}$ n が奇数のとき

$m>0$ ならば $f(x)$ の定義域は 実数全体

$m<0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

$\boxed{2}$ n が偶数のとき

$m>0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

$m<0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x>0$

㊊ $n=1$ のとき $f(x)=x^m$ より 関数 x^k（k は整数）の定義域 参照

$n \geqq 2$ のとき $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$

㊊ $\boxed{2}$ で n が偶数のとき，m，n は互いに素であるから m は奇数になる．

㊀ $\boxed{1}$ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$ の定義域は実数全体

$f(x)=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ の定義域は $x \neq 0$

$\boxed{2}$ $f(x)=x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$ の定義域は $x \geqq 0$

$f(x)=x^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ の定義域は $x>0$

関数 x^p（p は有理数）の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能，p が有理数とするとき

$$\left\{\left(g(x)\right)^p\right\}' = p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$$

㊔ $f(x) = x^p$ とおくと　$f'(x) = px^{p-1}$

$$\left\{\left(g(x)\right)^p\right\}' = \left\{f\left(g(x)\right)\right\}' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) = p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$$

㊙

$$\left\{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}\right\}' = \frac{4}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2+1)' = \frac{4}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot 2x = \frac{8}{3}x(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+1}$$

要

$f(x)$，$g(x)$ が微分できるなら 合成関数 $f\left(g(x)\right)$ も微分できる．

x で微分した導関数の x を $g(x)$ にして $g'(x)$ をかければよい．

例をあげると

x^p　　　を x で微分すると　px^{p-1}

$\left\{\left(g(x)\right)^p\right\}'$ を x で微分すると　$p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$

ちなみに $g(x) = x$ としても成り立つ．

他の微分も同じようにできる！

☆導関数の準公式

$\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

㊂ $\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\because \boxed{x^p \text{ の導関数}} \text{で } p=-1\right)$

$\boxed{2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\because \boxed{x^p \text{ の導関数}} \text{で } p=\dfrac{1}{2}\right)$

☆合成関数の導関数の準公式

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$\boxed{2}$ $\left\{\sqrt{g(x)}\right\}' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

㊂ $\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおくと $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left\{\sqrt{g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

㊅ $\boxed{1}$ $\left\{\dfrac{1}{x^2+1}\right\}' = -\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{2}$ $\{\sqrt{x^2+1}\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

三角関数の導関数

$\boxed{1}$ $(\sin x)' = \cos x$

$\boxed{2}$ $(\cos x)' = -\sin x$

$\boxed{3}$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

補 導関数の定義から導関数を求めることができるが，普段の微分では公式にして微分する．

補 $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ は差を積にする公式から $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を用いる．

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \sin x$ として

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}\\
&= -\cos x
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \cos x$ として

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として 商の微分 と $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ より

$$
f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ として 商の微分 と $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ より

$$
f'(x) = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}
$$

三角関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $\{\sin g(x)\}' = g'(x)\cos g(x)$

$\boxed{2}$ $\{\cos g(x)\}' = -g'(x)\sin g(x)$

$\boxed{3}$ $\{\tan g(x)\}' = \dfrac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$

$\boxed{4}$ $\left\{\dfrac{1}{\tan g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$

$$\{\sin g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = g'(x)\cos g(x)$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = -\sin x$

$$\{\cos g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = -g'(x)\sin g(x)$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \tan x$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\{\tan g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ とおくと $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$\left\{\frac{1}{\tan g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$$

例 $\boxed{1}$ $\{\sin(x^2+1)\}' = (x^2+1)'\cos(x^2+1) = 2x\cos(x^2+1)$

$\boxed{2}$ $\{\cos(x^2+1)\}' = -(x^2+1)'\sin(x^2+1) = -2x\sin(x^2+1)$

$\boxed{3}$ $\{\tan(x^2+1)\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{\cos^2(x^2+1)} = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$

$\boxed{4}$ $\left\{\dfrac{1}{\tan g(x)}\right\}' = -\dfrac{(x^2+1)'}{\sin^2(x^2+1)} = -\dfrac{2x}{\sin^2(x^2+1)}$

自然対数の底

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ここで e は無理数で $e=2.718281828459045\cdots$ と知られている．

底が e である対数 $\log x=\log_e x$ を 自然対数（しぜんたいすう） という．

㊟ 数学 Ⅲ では $\log_e x$ の底 e は省略し $\log x$ と表す．
e を自然対数の底といい，無理数である．

㊭ 底が e の対数を $\log x$ と表すが，$\ln x$ と表すこともある．

$x\to 0$ の関数 $\dfrac{\log(1+x)}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

㊫ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

$x\to 0$ の関数 $\dfrac{e^x-1}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

㊫ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ で $\log(1+x)=t$ とおくと

$1+x=e^t$ すなわち $x=e^t-1$

$x\to 0$ とすると $t\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}$$

これが 1 になるから $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1$ すなわち $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

対数関数の導関数

$\boxed{1}$ $\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\log a}$ $\quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$

定義域は $x > 0$

㊓ 普段の微分では公式にして微分する．

㊓ $\boxed{1}$ は $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ を利用する．

$\boxed{2}$ は底を a から e に変換して微分する．

㊂ $\boxed{1}$ $f(x) = \log x$ として

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ として

$$f'(x) = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{x\log a}$$

㊀ $\boxed{2}$ $(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x\log 10}$

対数関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $$\{\log g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\boxed{2}$ $$\{\log_a g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)\log a} \quad (0<a<1,\ 1<a)$$

定義域は $g(x)>0$ を満たす x の範囲

考 $\boxed{1}$ $f(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\{\log g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\log_a x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x\log a}$

$$\{\log_a g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\log a}$$

例 $\boxed{1}$ $\{\log(x^2+1)\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{2}$ $\{\log_{10}(x^2+1)\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\log 10} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\log 10}$

定義域を広げた対数関数の導関数

$\boxed{1}$ $\left(\log|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $\left(\log_a|x|\right)' = \dfrac{1}{x\log a}$ $\quad(0 < a < 1,\ 1 < a)$

定義域は $x \fallingdotseq 0$

補 $\log x$ の定義域は真数条件から $x > 0$ であるが，真数を絶対値にして
$\log|x|$ の定義域は真数条件から $|x| > 0$ すなわち $x \fallingdotseq 0$（$x < 0$ でも定義できる）
$\log x$ も $\log|x|$ も導関数は同じ $\dfrac{1}{x}$ になる．

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \log|x| = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log(-x) & (x < 0) \end{cases}$

あ $x > 0$ のとき $f(x) = \log x$ より $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

い $x < 0$ のとき $f(x) = \log(-x)$

合成関数の微分法より $f'(x) = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $f(x) = \log_a|x| = \dfrac{\log|x|}{\log a}$ として

$f'(x) = \dfrac{1}{\log a}(\log|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$

定義域を広げた対数関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

1 $\{\log|g(x)|\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

2 $\{\log_a|g(x)|\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\log a}$ $(0<a<1,\ 1<a)$

定義域は $g(x) \fallingdotseq 0$ を満たす x の範囲

考 1 $f(x) = \log|x|$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\{\log|g(x)|\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

2 $f(x) = \log_a|x|$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{x\log a}$

$$\{\log_a|g(x)|\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\log a}$$

例 1 $\{\log|x^2-1|\}' = \dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ $(x \fallingdotseq \pm1)$

2 $\{\log_{10}|x^2-1|\}' = \dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\log 10} = \dfrac{2x}{(x^2-1)\log 10}$ $(x \fallingdotseq \pm1)$

指数関数の導関数

$\boxed{1}$ $(e^x)' = e^x$

$\boxed{2}$ $(a^x)' = a^x \log a \quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$

㊟ 普段の微分では公式にして微分する．

㊟ $\boxed{1}$ は逆関数の微分法を利用する．あるいは，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を利用する．

$\boxed{2}$ も逆関数の微分を利用する．

㊎ $\boxed{1}$ $y = e^x$ とおくと　$x = \log y$

両辺を y で微分して　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$

よって　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = y = e^x$

$\boxed{2}$ $y = a^x$ とおくと　$x = \log_a y$

両辺 y で微分して　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y \log a}$

よって　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = y \log a = a^x \log a$

㊀ $\boxed{1}$ $f(x) = e^x$ として

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ $f(x) = a^x$ として

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{e^{h \log a} - 1}{h} \quad (\because a^h = e^{\log a^h} = e^{h \log a}) \\
&= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} \cdot \log a \\
&= a^x \cdot 1 \cdot \log a \\
&= a^x \log a
\end{aligned}
$$

㊟ $\boxed{2}$ で $a = e$ とすると $\boxed{1}$ になる．

㊖ $\boxed{2}$ $(5^x)' = 5^x \log 5$

指数関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $\left\{e^{g(x)}\right\}' = g'(x)e^{g(x)}$

$\boxed{2}$ $\left\{a^{g(x)}\right\}' = g'(x)a^{g(x)}\log a \quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$

㋐ $\boxed{1}$ $f(x) = e^x$ とおくと　$f'(x) = e^x$

$$\left\{e^{g(x)}\right\}' = \left\{f(g(x))\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = a^x$ とおくと　$f'(x) = a^x\log a$

$$\left\{a^{g(x)}\right\}' = \left\{f(g(x))\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = g'(x)\log a e^{g(x)}$$

㋫ $\boxed{1}$ $(e^{x^2+1})' = (x^2+1)'e^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}$

$\boxed{2}$ $(3^{x^2+1})' = (x^2+1)'3^{x^2+1}\log 3 = 2x\cdot 3^{x^2+1}\cdot\log 3$

㊟ $(a^x)' = (e^{\log a^x})' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}(x\log a)' = a^x\log a$

対数微分法

関数 $f(x)$ は微分可能とする．

このとき $y=f(x)$ の導関数を求めるのに次のような手順がある．

$\boxed{1}$ 両辺の絶対値の自然対数をとり $\log|y|=\log|f(x)|$

$\boxed{2}$ 両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y}=\{\log|f(x)|\}'$

$\boxed{3}$ $y=f(x)$ とし，y' について整理して $y'=f(x)\{\log|f(x)|\}'$

すなわち $y=f(x)$ の導関数は $f(x)\{\log|f(x)|\}'$

補 $y=f(x)$ がそのまま微分するのが厳しくても，対数をとることで微分ができる．

補 対数をとるので真数が正にならないといけないので，絶対値にする．

ただし，$f(x)\neq 0$ とならなければいけない．

両辺が正の場合はそのまま対数をとればよい．

別 $f(x)>0$ ならば $y=f(x)=e^{\log f(x)}$ として微分してもよい．

例 $y=x^x$ $(x>0)$ の導関数を求める．

$x>0$ において $x^x>0,\ y>0$

$\boxed{1}$ 両辺の自然対数をとり $\log y=\log x^x$

$$=x\log x$$

$\boxed{2}$ 両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$

$\boxed{3}$ $y'=x^x(\log x+1)$

別 $y=x^x=e^{\log x^x}=e^{x\log x}$ を x で微分する．

関数 x^α（α は実数）の導関数

α が実数のとき

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

㊓ $(x^3)' = 3x^2$ の整数 3 を実数（有理数または無理数）としても微分できる．

㊔ $\alpha = 0$ のとき　$x^0 = 1$ とする．つまり　$(1)' = 0$

$\alpha = 1$ のとき $(x)' = 1$

$x \fallingdotseq 0$ として　$y = x^\alpha$　とおき，両辺の絶対値の自然対数をとると $\log|y| = \log|x|^\alpha$

すなわち　$\log|y| = \alpha \log|x|$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y} = \alpha \cdot \dfrac{1}{x}$

すなわち　$y' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

㊓ α が無理数のもとで $f(x) = x^\alpha$ とおくと　$f(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & (\alpha > 1) \\ \text{収束しない} & (\alpha < 1) \end{cases}$$

$\alpha > 1$ ならば $x = 0$ で微分可能で　$f'(0) = 0$

すなわち　$\alpha > 1$ ならば　$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ は $x = 0$ でも成り立つ．

㊕ $(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$

★関数 x^{α}（α は無理数）の定義域

関数 $f(x)=x^{\alpha}$（α は無理数）の定義域について

$\boxed{1}$ $\alpha>0$ のとき

$f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

$\boxed{2}$ $\alpha<0$ のとき

$f(x)$ の定義域は $x>0$

㊀ $\boxed{1}$ $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ の定義域は $x \geqq 0$

$\boxed{2}$ $f(x)=x^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}}$ の定義域は $x>0$

㊂ α が有理数のときは $\boxed{\text{関数 } x^{\frac{m}{n}} \text{ の定義域}}$

関数 x^{α}（α は実数）の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能，α が実数とするとき

$$\left\{\left(g(x)\right)^{\alpha}\right\}' = \alpha\left\{g(x)\right\}^{\alpha-1}g'(x)$$

㊢ $f(x) = x^{\alpha}$ とおくと　$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\left\{(g(x))^{\alpha}\right\}' = \left\{f\left(g(x)\right)\right\}' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) = \alpha\left\{g(x)\right\}^{\alpha-1}g'(x)$$

㊦ $\left\{(x^2+1)^{\sqrt{2}}\right\}' = \sqrt{2}(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}\cdot(x^2+1)' = \sqrt{2}(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}\cdot 2x = 2ex(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}$

☆ $e^{ax}f(x)$ の導関数

$f(x)$ は微分可能な関数，a を実数の定数とする．

$\boxed{1}$ $\{e^x f(x)\}' = e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$\boxed{2}$ $\{e^{ax} f(x)\}' = e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}$

㊟補 $\boxed{\text{積の微分}}$ でよいが，e^{ax} は微分しても形が変わらないから，共通因数になる．

補 $\boxed{2}$ で $a=1$ とすると $\boxed{1}$ になる．

補 $\boxed{2}$ で $a=0$ のときも $e^{ax}=e^0=1$ であるから成り立つ．

考 $\boxed{1}$ $\{e^x f(x)\}' = (e^x)'f(x)+e^x\{f(x)\}' = e^x f(x)+e^x f'(x) = e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$\boxed{2}$ $\{e^{ax} f(x)\}' = (e^{ax})'f(x)+e^{ax}\{f(x)\}' = ae^{ax}f(x)+e^{ax}f'(x)$

$= e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}$

例 $\boxed{1}$ $(e^x x^2)' = e^x(x^2+2x)$

$(e^x \sin x)' = e^x(\sin x+\cos x)$

$\boxed{2}$ $(e^{3x}x^2)' = e^{3x}(3x^2+2x)$

$(e^{3x}\sin x)' = e^{3x}(3\sin x+\cos x)$

$(e^{-x}x^2)' = e^{-x}(-x^2+2x)$

$(e^{-2x}\sin x)' = e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

陰関数

2変数 x，y の間に関係式 $F(x, y)=0$ があり，

ある点 (x_0, y_0) の近くの (x, y) だけを考えて

y が x の関数，あるいは x が y の関数になるようなものを含むとする．

このとき $F(x, y)=0$ を 陰関数（いんかんすう）または 陰伏関数（いんふくかんすう）という．

㊟ 陰関数は英語で「implicit function」

これに対し $y=f(x)$ は陽関数といい，英語で「explicit function」という．

英語では陰と陽の意味はなく，和訳したときのダジャレらしい．

㋴ $x^2+y^2-1=0$ は $y=\sqrt{1-x^2}$ や $y=-\sqrt{1-x^2}$ を含むので陰関数．

陰関数の導関数

陰関数 $F(x, y)=0$ を x で微分する場合，次のような微分を考える．

α を実数として

$$(y^\alpha)'=\alpha y^{\alpha-1}\cdot y'=\alpha y^{\alpha-1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

㋖ $y=g(x)$ とすると $\boxed{x^\alpha\ (\alpha \text{ は実数}) \text{ の合成関数の導関数}}$

㋴ $(y^2)=2yy'=2y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$(y^3)=3y^2y'=3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}$

㋴ $x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると $2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$

これは $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\mp\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (x\neq\pm1)$ と同じこと．

高次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき

$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の **第2次導関数** といい

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ y^{(2)},\ f^{(2)}(x)$$ などの記号で表す.

これに対して $f'(x)$ を $f(x)$ の **第1次導関数** という.

また **第2次導関数** $f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の **第3次導関数** といい

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ y^{(3)},\ f^{(3)}(x)$$ などの記号で表す.

一般に 自然数 n に対して

関数 $y=f(x)$ を n 回微分することによって得られる関数を

$f(x)$ の **第 n 次導関数** といい

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$ などの記号で表す.

補 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は略式記号で，正式には $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

例 $y=\sin x$ とすると

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\sin x$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

媒介変数で表された関数の導関数

点 $(x,\ y)$ が媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるとき

第 1 次導関数は $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

第 2 次導関数は $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

㊫ $z = \dfrac{dy}{dx}$ とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

㊒ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ について $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t,\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{1}{\tan t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

㊗ $f(t) = t$ の場合は

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるので

$$y = g(x)$$

接線の傾き

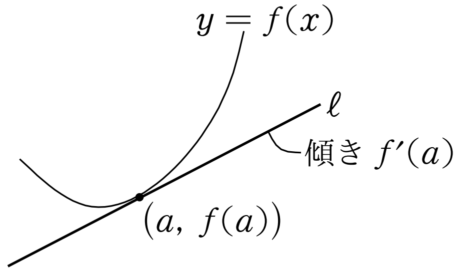
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の傾き は $f'(a)$ に等しい.

つまり

(接線の傾き)＝(導関数に接点の座標を代入した値)



㊥ 接線の傾きは微分係数.

㊧ $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の傾きは

$f'(x)=2x$　より　$f'(1)=2$

接線の方程式

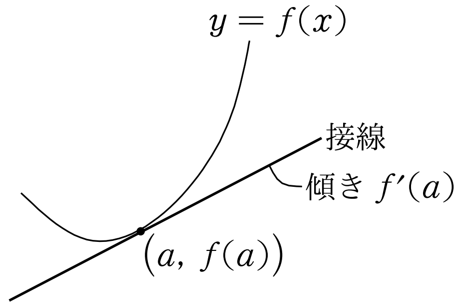
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の方程式 は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

とくに 点 $\big(a,\ f(a)\big)$ を 接点（せってん） という.



㊧ $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式は

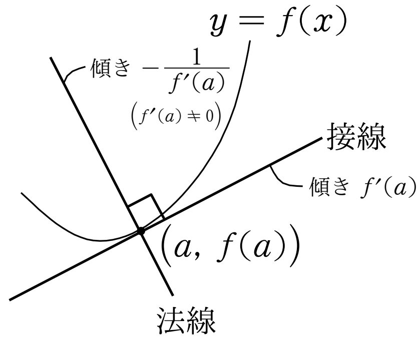
$$\begin{aligned} y&=f'(1)(x-1)+f(1)\\ &=2(x-1)+1\\ &=2x-1 \end{aligned}$$

法線の方程式

座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

法線の方程式 は



$\boxed{1}$ $f'(a)\neq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ のとき

$$x=a$$

法線の方程式の一般形として

$$x+f'(a)y=a+f'(a)f(a)$$

㊓ 法線は接点を通り，接線に直交する直線なので傾きの積が -1 を考える．
ただし $f'(a)=0$ のとき，法線は傾きをもたず，y 軸に平行になる．

㊓ 法線の法線ベクトルは接線の方向ベクトル $\big(1,\ f'(a)\big)$

㊙ $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)\\ &=-\frac{1}{2}(x-1)+1\\ &=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

2 曲線が接する条件

座標平面で

$$2\text{ 曲線}\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

が $x=\alpha$ で共通接線をもつとき

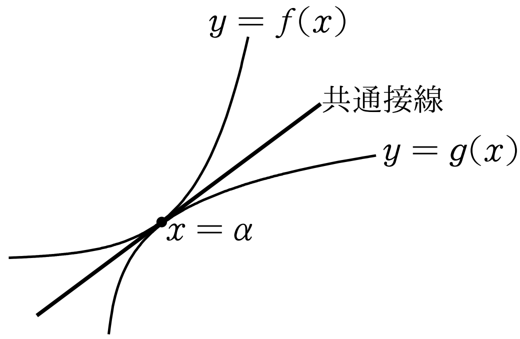
$$2\text{ 曲線}\quad\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}\quad \text{は } x=\alpha \text{ で接する}$$

という．

このとき

$\boxed{1}$ $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

を満たす．



$\boxed{2}$ $f(x)$ と $g(x)$ がともに整式のとき

x の方程式 $f(x)-g(x)=0$ は 重解 $x=\alpha$ をもつ．

例 $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=-2x^2+6x-3 \end{cases}$

について

$$2\text{ 曲線}\quad\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}\quad \text{は } x=1 \text{ で接する．}$$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} f'(x)=2x \\ g'(x)=-4x+6 \end{cases}$

このとき

$$\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=2 \end{cases}$$

共通接線の方程式は $y=2x-1$

$\boxed{2}$ $f(x)-g(x)=3x-6x+3=3(x-1)^2$

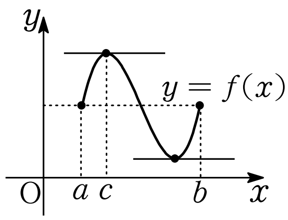
x の方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=1$ を重解にもつ．

★ロルの定理

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとして

$f(a) = f(b)$ ならば

$f'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ となる実数 c が存在する．



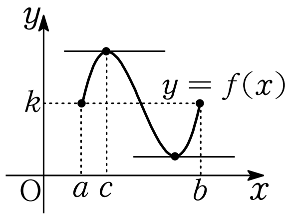
補 直感的には $y = f(x)$ グラフに $a < x < b$ の区間で傾き 0 の接線がひける．

考 $f(a) = f(b) = k$ とおく．

$f(x)$ が定数ならば明らか．

$f(x)$ が定数ではないならば

$f(x) > k$ または $f(x) < k$ となる x が存在する．



$f(x) > k$ となる x が存在する場合は

最大値の原理より $a \leqq x \leqq b$ の区間に最大値が存在するので，それを $f(c)$ $(a < c < b)$ とおく．

このとき $a < x < b$ で常に $f(c) \geqq f(x)$ すなわち $f(x) - f(c) \leqq 0$ が成り立つ．

あ $a \leqq x < c$ のとき

$x - c < 0$ なので $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0$

ここで $\displaystyle\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$ であるから $f'(c) \geqq 0$ ……①

い $c < x \leqq b$ のとき

$x - c > 0$ なので $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0$

ここで $\displaystyle\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$ であるから $f'(c) \leqq 0$ ……②

① かつ ② より $f'(c) = 0$

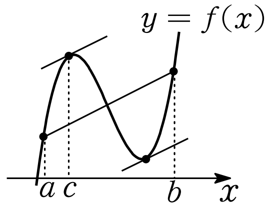
$f(x) < k$ となる x が存在する場合も同様に示せる．

平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

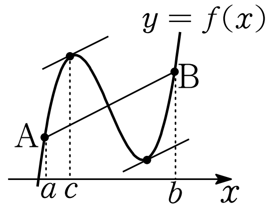


㊫ 直感的にはグラフにおいて $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}\big(a,\ f(a)\big)$，$\mathrm{B}\big(b,\ f(b)\big)$ を通る直線 AB の傾きと同じ傾きの接線が $a<x<b$ の区間でひける．

㊮ $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

とおくと

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$g(a)=0$，$g(b)=0$ であるから　$g(a)=g(b)$

ロルの定理を用いて　$g'(c)=0$　すなわち　$f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

㊍ $f(x)=\log x$ は閉区間 $[1,\ e]$ で連続，開区間 $(1,\ e)$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$　すなわち　$\dfrac{1}{e-1}=\dfrac{1}{c}$

を満たす $1<c<e$ となる実数 c が存在する．

㊜

平均値の定理は a と b の大小関係がよくわからずに使うことも多いので

次のように用いることもよくある．

関数 $f(x)$ が微分可能ならば

$$\big|f(b)-f(a)\big|=\big|f'(c)(b-a)\big|$$

を満たす c が a と b の間に存在する．

㊫ $a=b$ ならば

(左辺) $=\big|f(a)=f(a)\big|=0$

(右辺) $=\big|f'(c)(a-a)\big|=0$

(左辺) $=$ (右辺) で成り立つ．

㊍ $f(x)=\sin x$ について，$f'(x)=\cos x$

$\big|f(b)-f(a)\big|=\big|f'(c)(b-a)\big|$　すなわち　$|\sin b-\sin a|\leqq|\cos c||b-a|$

を満たす実数 c が a と b の間に存在する．

$|\cos c|\leqq 1$ であるから　$|\sin b-\sin a|\leqq|b-a|$

★平均値の定理 Ⅱ

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能ならば

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$$

すなわち

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

を満たす $0<\theta<1$ となる実数 θ が存在する.

㊫ $\boxed{\text{平均値の定理}}$ で $b-a=h$，$\dfrac{c-a}{b-a}=\theta$ とおくと $0<\theta<1$，$b=a+h$，$c=a+\theta h$

㊮ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}f'(a+\theta h)=f'(a)$

㊄ $f(x)=\log x$ は閉区間 $[1, e]$ で連続，開区間 $(1, e)$ で微分可能で $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$h=e-1$ として

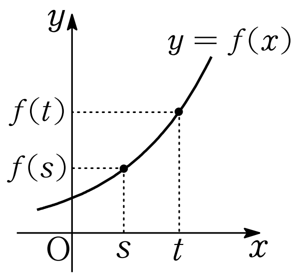
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1+\theta h) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\log(1+h)}{h}=\frac{1}{1+\theta h}$$

を満たす $0<\theta<1$ となる実数 θ が存在する.

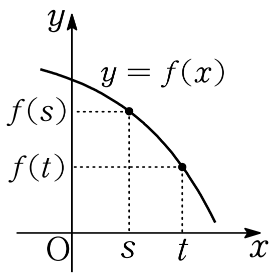
単調増加関数・単調減少関数

関数 $f(x)$ における定義域内の任意の値 s, t について

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{1}$ $s < t$ ならば $f(s) < f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ は **単調増加関数** という.

$\boxed{2}$ $s < t$ ならば $f(s) > f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ は **単調減少関数** という.

補 $\boxed{1}$ を厳密には「狭義」の単調増加関数という.

「$f(s) < f(t)$」を「$f(s) \leqq f(t)$」をしたものを「広義」の単調増加関数という.

$\boxed{2}$ を厳密には「狭義」の単調減少関数という.

「$f(s) > f(t)$」を「$f(s) \geqq f(t)$」をしたものを「広義」の単調減少関数という.

高校数学では「広義」のものは基本的に考えない.

例 $\boxed{1}$ $f(x) = 2^x$ は任意の実数 s, t $(s < t)$ に対して $f(s) < f(t)$ が成り立つので,

$f(x)$ は単調増加関数.

$\boxed{2}$ $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は任意の実数 s, t $(s < t)$ に対して $f(s) > f(t)$ が成り立つので,

$f(x)$ は単調減少関数.

導関数の符号と関数の増減

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．

このとき，関数 $f(x)$ の値の 増減 は次のようになる．

$\boxed{1}$ 開区間 (a, b) でつねに $f'(x) > 0$ ならば

閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ は 増加（$\nearrow$）する．

$\boxed{2}$ 開区間 (a, b) でつねに $f'(x) < 0$ ならば

閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ は 減少（$\searrow$）する．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) でつねに $f'(x) = 0$ ならば

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定数である．

補 $\boxed{1}$ $f(x)$ が増加する区間で $y = f(x)$ の接線を引くと傾きが正になる．

$\boxed{2}$ $f(x)$ が減少する区間で $y = f(x)$ の接線を引くと傾きが負になる．

$\boxed{3}$ つねに $f'(x) = 0$ は $y = f(x)$ のグラフが傾きが 0 の直線になる．

考 閉区間 $[a, b]$ の任意の $s,\ t$ $(s < t)$ に対して平均値の定理を用いて

$$f(t) - f(s) = f'(c)(t - s)$$

を満たす $s < c < t$ となる実数 c が存在する．

ここで $t - s > 0$

$\boxed{1}$ 開区間 (a, b) でつねに $f'(x) > 0$ ならば $f'(c) > 0$

よって $f(t) - f(s) > 0$ すなわち $f(s) < f(t)$ であるから $f(x)$ は増加する．

$\boxed{2}$ 開区間 (a, b) でつねに $f'(x) < 0$ ならば $f'(c) < 0$

よって $f(t) - f(s) < 0$ すなわち $f(s) > f(t)$ であるから $f(x)$ は減少する．

$\boxed{3}$ 開区間 (a, b) でつねに $f'(x) = 0$ ならば $f'(c) = 0$

よって $f(t) - f(s) = 0$ すなわち $f(t) = f(s)$ であるから $f(x)$ は定数である．

極値

関数 $y=f(x)$ において

$\boxed{1}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 増加（↗）から 減少（↘）となるとき

$f(x)$ は $x=a$ において極大になるという.

そのときの $y=f(x)$ 上の点を極大点といい，値 $f(a)$ を **極大値** という.

$\boxed{2}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 減少（↘）から 増加（↗）となるとき

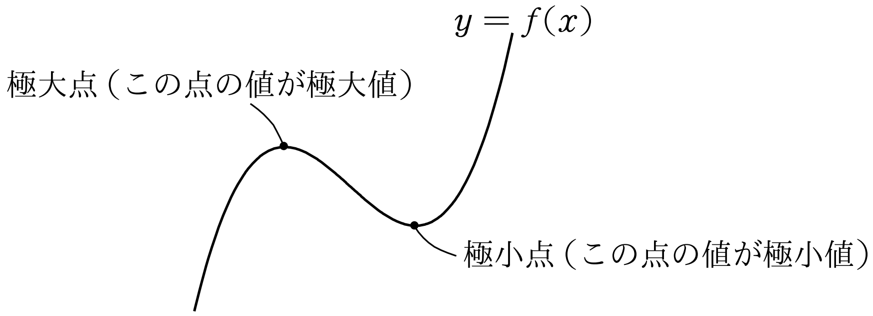
$f(x)$ は $x=a$ において極小になるという.

そのときの $y=f(x)$ 上の点を極小点といい，値 $f(a)$ を **極小値** という.

さらに 極大値と極小値を合わせて **極値** という.

補 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でなくても極大や極小になることがある.

例



極値と微分係数

関数 $f(x)$ は微分可能であるとして

$\boxed{1}$ $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるならば $f'(a)=0$

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ であっても $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるとは限らない.

$f'(a)=0$ ならば x の値を大きくして $x=a$ の前後で

$f'(x)$ の値が正（+）から負（−）に変われば $f(a)$ は 極大値

$f'(x)$ の値が負（−）から正（+）に変われば，$f(a)$ は 極小値

$f'(x)$ の値の符号が変わらなければ，$f(a)$ は 極値ではない

曲線の凹凸

微分可能な関数 $C : y = f(x)$ のグラフについて

$\boxed{1}$ ある区間で C の接線の傾きが，x の増加にともなって大きくなるとき，

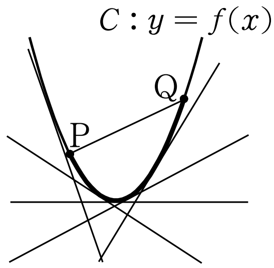
すなわち $f'(x)$ が増加するとき，

曲線 C はその区間で下に凸（とつ）であるという．

このとき，この区間の C 上の任意の 2 点 P，Q に対して

弧 PQ は線分 PQ の下側にある．

ただし，端点 P，Q は除く．



$\boxed{2}$ ある区間で C の接線の傾きが，x の増加にともなって小さくなるとき，

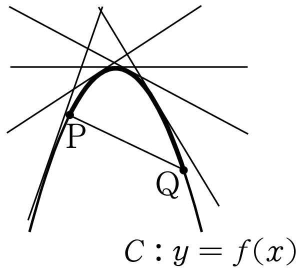
すなわち $f'(x)$ が減少するとき，

曲線 C はその区間で上に凸（とつ）であるという．

このとき，この区間の C 上の任意の 2 点 P，Q に対して

弧 PQ は線分 PQ の上側にある．

ただし，端点 P，Q は除く．



補 高校数学ではこれを定義にしている．厳密には凸関数を定義して考える．

第 2 次導関数 $f''(x)$ の符号と曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数をもつとき

$\boxed{1}$ ⊕ $f''(x) > 0$ となる区間で $y = f(x)$ は 下に凸（とつ） ($\cup$) である．

$\boxed{2}$ ⊖ $f''(x) < 0$ となる区間で $y = f(x)$ は 上に凸（とつ） ($\cap$) である．

例 $\boxed{1}$ $y = x^2$ は $y' = 2x$，$y'' = 2 > 0$ で下に凸

$\boxed{2}$ $y = -x^2$ は $y' = -2x$，$y'' = -2 < 0$ で上に凸

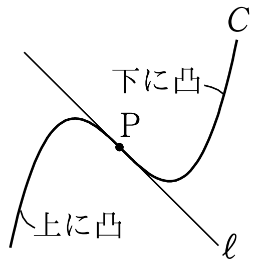
変曲点

連続な曲線 C 上の点 P で接線 ℓ が引けて，

点 P の前後で凹凸が変わるとき

点 P を変曲点（へんきょくてん）という．

この点 P の前後の C の部分が ℓ に関して反対の側にある．



㊗ 大雑把に言うと，曲線の凹凸が入れかわる境の点を変曲点という．

$y=f(x)$ の変曲点

1 関数 $f(x)$ が第 2 次導関数をもつとき

$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ は変曲点である．

2 $f''(a)$ が存在しなくても $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ は変曲点である．

㊗ 2 は変曲点で引く接線が y 軸に平行な場合である．

㊝ 1 $f(x)=x^3$ について　$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$

$f''(x)$ の符号が $x=0$ の前後で負から正に符号が変わる．

よって，$y=f(x)$ 上の点 $(0,0)$ は変曲点

2 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ について　$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

$f''(x)$ の符号が $x=0$ の前後で正から負に符号が変わる．

このとき，$f''(0)$ は存在しないが，$y=f(x)$ 上の点 $(0,0)$ は変曲点

関数の増減表の記号

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を補助的に視覚化したものに**増減表**がある．

$f'(x)$ と場合によっては $f''(x)$ の符号を調べ，次のような記号を使う．

x	$\cdots$	$\triangle$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

x	$\cdots$	$\triangle$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	⤵	↘	↗	⤴

㋭ 増減表の書き方の定義はとくになく，増減がわかる程度にかけばよい．
$f'(x)$ の符号の調べ方には工夫が必要だが，それはまた講義でやる．

㊟ 高校数学では片側微分は調べないので区間の端の $f'(x)$，$f''(x)$ は考えなくてよい．

第２次導関数の値の符号と極値

関数 $f(x)$ が第２次導関数をもつとき

$\boxed{1}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は 極大値

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は 極小値

考 $\boxed{1}$ $f''(a)<0$ のとき，$f''(x)$ は連続であるから，$x=a$ の近くでは $f''(x)<0$

これより，$x=a$ の近くでは $f'(x)$ は単調に減少する．

$f'(a)=0$ であるから

$x<a$ ならば $f'(x)>0$

$a<x$ ならば $f'(x)<0$

よって，$f(a)$ は極大値である．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\boxed{2}$ $f''(a)>0$ のとき，$f''(x)$ は連続であるから，$x=a$ の近くでは $f''(x)>0$

これより，$x=a$ の近くでは $f'(x)$ は単調に増加する．

$f'(a)=0$ であるから

$x<a$ ならば $f'(x)<0$

$a<x$ ならば $f'(x)>0$

よって，$f(a)$ は極小値である．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

例 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ について

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表をかくと次になる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

極大値 5 $(x=1)$，極小値 1 $(x=3)$

$f''(x)=6x-12$

$\boxed{1}$ $f'(1)=0$ かつ $f''(1)=-6<0$ であるから $f(1)=5$ は極大値

$\boxed{2}$ $f'(3)=0$ かつ $f''(3)=6>0$ であるから $f(3)=1$ は極小値

極限と漸近線

$y=f(x)$ について a，b を定数として

$$\lim_{x\to\infty}\{y-(ax+b)\}=0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty}\{y-(ax+b)\}=0$$

が成り立つとき

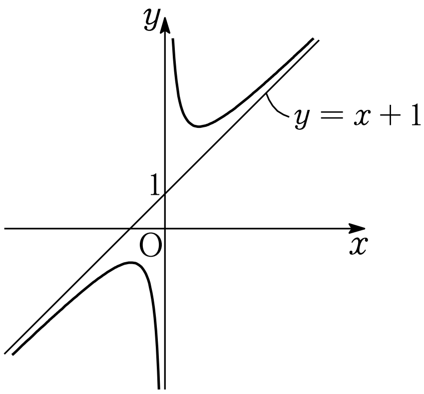
直線 $y=ax+b$ は 曲線 $y=f(x)$ の **漸近線** である．

㊚ $x\to\pm\infty$ のとき $y\fallingdotseq ax+b$ となることから，
$y=f(x)$ は直線 $y=ax+b$ に限りなく近づく．

㊑ $y=f(x)=\dfrac{1}{x}+x+1$ について

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{y-(x+1)\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

これより $y=x+1$ は $y=f(x)$ の漸近線である．



関数 $y = f(x)$ のグラフの概形の考察

座標平面の曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を描くときは，

次のようなことについて調べるとよい．（全部を必ずしも調べなくてもよい）

$\boxed{1}$ 定義域（x の範囲）

$\boxed{2}$ 対称性，周期性

$\boxed{3}$ 増減，極値

$\boxed{4}$ 凹凸，変曲点

$\boxed{5}$ 座標軸との交点など特別な点

$\boxed{6}$ 漸近線

$\boxed{7}$ 連続でない点，微分可能でない点の様子

補 $\boxed{1}$ グラフの存在する範囲をみる

$\boxed{2}$ 対称性や周期性があれば定義域がしぼれる．

$\boxed{3}$ $f'(x)$ の符号を調べることでグラフの増減や極値がわかる．

$\boxed{4}$ $f''(x)$ の符号を調べることでグラフの凹凸や変曲点がわかる．

$\boxed{5}$ x 切片や y 切片がわかるとグラフが描きやすくなる．

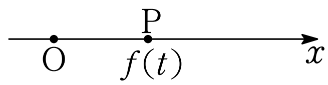
$\boxed{6}$ x 軸や y 軸に平行な直線，直線 $y = ax + b$ の漸近線があるならば，近づくように描く．

$\boxed{7}$ 特殊な点があるときもきちんと調べる．

数直線上の動点の速度・速さ・加速度

数直線上を動く点Pの座標 x が媒介変数を t として

$$x = f(t)$$



と表されるとき，点Pの速度（そくど）を v，速（はや）さを $|v|$，加速度（かそくど）を α として

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

速さ $|v| = \left|\dfrac{dx}{dt}\right| = |f'(t)|$

加速度 $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$

とくに

⊕ $v > 0$ のとき点Pは正の方向（→）に動く

⊖ $v < 0$ のとき点Pは負の方向（←）に動く

例 数直線上の点 $\mathrm{P}(x)$ が

$x = \cos t \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

と表されるとき

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = -\sin t$

速さ $|v| = \left|\dfrac{dx}{dt}\right| = |-\sin t| = \sin t$

加速度 $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	
x	1	←	-1	→	1

座標平面上の動点の速度・速さ・加速度

座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるとき，点 P の速度（そくど）を $\vec{v}$，速さ（はや）を $\left|\vec{v}\right|$，加速度（かそくど）を $\vec{\alpha}$ として

速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\,\dfrac{dy}{dt}\right) = \big(f'(t),\,g'(t)\big)$

速さ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\,\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

加速度の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

ここで 速度 $\vec{v}$ の向きは 点 P の描く曲線の接線の方向と一致する．

とくに

⊕ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ のとき 点 P は x 軸の正の方向（→）に動く

⊖ $\dfrac{dx}{dt} < 0$ のとき 点 P は x 軸の負の方向（←）に動く

⊕ $\dfrac{dy}{dt} > 0$ のとき 点 P は y 軸の正の方向（↑）に動く

⊖ $\dfrac{dy}{dt} < 0$ のとき 点 P は y 軸の負の方向（↓）に動く

補 速度 $\vec{v}$ は速度ベクトル，加速度 $\vec{\alpha}$ は加速度ベクトルともいう．

例 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

と表されるとき

速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\,\dfrac{dy}{dt}\right) = (-\sin t,\,\cos t)$

速さ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

加速度 $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\,\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = (-\cos t,\,-\sin t)$

加速度の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

点 P は単位円周上を一定の速さ 1 で動く．このような運動を等速円運動という．

媒介変数で表された曲線の増減表の記号

座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるとき，増減表 は次のような記号を使う．

t	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$+$	$+$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\dfrac{dy}{dt}$	$-$	$+$	$-$	$+$
y	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$(x,\ y)$	$\swarrow$	$\nwarrow$	$\searrow$	$\nearrow$

補 増減表の書き方の定義はとくになく，増減がわかる程度にかけばよい．

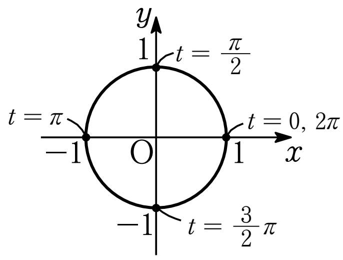
例 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表されるとき

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

増減表は次のようになる．



t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$		2π
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x	1	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$(0,\ 1)$	$\swarrow$	$(-1,\ 0)$	$\searrow$	$(0,\ -1)$	$\nearrow$	$(1,\ 0)$

安田の定理

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は微分可能 とする．

関数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ について $F'(\alpha)=0$ ならば

$$F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}\quad \text{ただし}\ \ g'(\alpha)\neq 0$$

話 安田亨先生が作られた定理，「安田の公式」ともいう．

補 分数形の関数の極値を求めるのに威力を発揮する．

考 商の微分法より

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$F'(x)=0$ とすると $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$ ……①

$F'(\alpha)=0$ より ① を満たす x が α なので $f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)=0$

よって $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

例 $F(x)=\dfrac{x+4}{x^2+4x+7}$ の極値について

$$F'(x)=\frac{x^2+4x+7-(x+4)(2x+4)}{(x^2+4x+7)^2}=\frac{-(x^2+8x+9)}{(x^2+4x+7)^2}$$

$F'(x)=0$ とすると $x^2+8x+9=0$ より $x=-4\pm\sqrt{7}$

x	$\cdots$	$-4-\sqrt{7}$	$\cdots$	$-4+\sqrt{7}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$\alpha=-4-\sqrt{7}$ とおくと $\alpha^2+4\alpha+7-(\alpha+4)(2\alpha+4)=0$ $\big(F'(x)$ の分子より$\big)$

すなわち $\dfrac{\alpha+4}{\alpha^2+4\alpha+7}=\dfrac{1}{2\alpha+4}$

極小値 $F(\alpha)=\dfrac{\alpha+4}{\alpha^2+4\alpha+7}=\dfrac{1}{2(\alpha+2)}=\dfrac{1}{2(-2-\sqrt{7}\,)}=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{7}}{6}}$

$\beta=-4+\sqrt{7}$ とおくと同様に

極大値 $F(\beta)=\dfrac{\beta+4}{\beta^2+4\beta+7}=\dfrac{1}{2(\beta+2)}=\dfrac{1}{2(-2+\sqrt{7}\,)}=\boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}}$

補 上の 例 のように式変形を説明すると減点されない．

直接計算しても求まるので，計算力があれば使わなくてもよい．

念のため 例 を説明しておくと

$f(x)=x+4,\ g(x)=x^2+4x+7$ とおくと $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ f'(x)=1,\ g(x)=2x+4$

$F'(x)=0$ とすると $x=\alpha,\ \beta$

$$f(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{1}{2\alpha+4}=\frac{1}{2(\alpha+2)}$$

$$f(\beta)=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}=\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}=\frac{1}{2\beta+4}=\frac{1}{2(\beta+2)}$$

★関数の１次近似式

$\boxed{1}$ h が 0 に近いとき $f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

$\boxed{2}$ x が 0 に近いとき $f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

㊂ $\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ より $h \to 0$ ならば $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \fallingdotseq f'(a)$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ より $x \to 0$ ならば $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \fallingdotseq f'(0)$

㊫ $\boxed{1}$ で $a=0$ とすると $\boxed{2}$ と同じことになる．

㊀ $\boxed{1}$ $f(x)=x^3$ とすると $f'(x)=3x^2$

$h \fallingdotseq 0$ のとき $f(1+h) \fallingdotseq f(1)+f'(1)h$

すなわち $(1+h)^3 \fallingdotseq 1+3h$

ここで，$h=0.01$ とすると $(1.01)^3 \fallingdotseq 1.003$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sin x$ とすると $f'(x)=\cos x$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

すなわち $\sin x \fallingdotseq x$

この近似から $x \to 0$ とすると $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ が確認できる．

★テーラー展開（Taylor expanshion）

何回でも微分可能な関数 $f(x)$ は次のような無限級数で表せる．

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\alpha)(x-\alpha)^k \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(x-\alpha)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)(x-\alpha)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n + \cdots \end{aligned}$$

この無限級数を $f(x)$ の $x=\alpha$ のまわりの **テーラー展開** という．

(補) 関数 $f(x)$ の $x=\alpha$ のまわりの近似が多項式で表せる．

(例) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

について

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

$f^{(n)}(x) = 0 \ (n = 4, 5, 6, \cdots)$

であることから，$f(x)$ は何回でも微分できる．

$f(x)$ を $x = 1$ のまわりにテーラー展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x-1)^3 \\ &= 3 + 2(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot 6(x-1)^3 \\ &= 3 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

ここで，整式の割り算を考えると

$f(x)$ を $(x-1)$ で割ったときの余りは 3

$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $3 + 2(x-1) = 2x + 1$

のようなことがわかる．

★マクローリン展開（Maclaurin expanshion）

何回でも微分可能な関数 $f(x)$ は次のような無限級数で表せる．

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$
$$=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2$$
$$+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

この無限級数を $f(x)$ の **マクローリン展開** という．

例 $f(x)=e^x$ は $f^{(n)}(x)=e^x$，$f^{(n)}(0)=1$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad \cdots\cdots (*)$$

(*) で $x=1$ とすると $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

このとき $n=10$ までの和を計算すると

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$$
$$=2.7182818\cdots$$

e の値が近似されている．

(*) が言えることから，次の不等式が成り立つことがわかる．（厳密な証明は微分法）

$x>0$ のとき

$$e^x \geqq 1+x$$
$$e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}$$
$$e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$
$$\vdots$$
$$e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

これより $x>0$ のもとで $e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ すなわち $0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

ここで $\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$

はさみうちの原理を用いて $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ ……①

$n=1$ として $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

$e^x=t$ とおくと $x=\log t$，$x\to\infty$ とすると $t\to\infty$

すなわち $\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$

よって $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ ……②

① や ② の極限は証明なしで使うことも多いが，このような背景がある．

★コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

ただし 開区間 $(a,\ b)$ で $g'(x)\neq 0$，$g(a)\neq g(b)$

補 直感的には点 $\mathrm{P}\big(g(x),\ f(x)\big)$ の表す曲線上に 2 点 $\mathrm{A}\big(g(a),\ f(a)\big)$，$\mathrm{B}\big(g(b),\ f(b)\big)$ をとると，直線 AB の傾きと同じ傾きの接線が $a<x<b$ の間でひける．

考 $F(x)=\{f(x)-f(a)\}\{g(b)-g(a)\}-\{g(x)-g(a)\}\{f(b)-f(a)\}$

とおくと

$$F'(x)=f'(x)\{g(b)-g(a)\}-g'(x)\{f(b)-f(a)\}$$

$F(a)=F(b)=0$ であるから，ロルの定理を用いて

$F'(c)=0$ を満たす $a<c<b$ の実数 c が存在する．すなわち

$$f'(c)\{g(b)-g(a)\}-g'(c)\{f(b)-f(a)\}=0$$

よって $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす実数 c が存在する．

例 $f(x)=1-\cos x$，$g(x)=x^2$ とすると $f'(x)=\sin x$，$g'(x)=2x$

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

すなわち

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin c}{2c}$$

となる c が 0 と x の間に存在する．

このとき，$x\to 0$ とすると $c\to 0$ となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{c\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin c}{c}=\frac{1}{2}$$

★ロピタルの定理

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$-\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形 かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

ただし a，L は 数値 または ∞，$-\infty$

㊓ この定理のすべてを証明することは高校数学の範囲を超える．
証明できないものを使うべきでないが，答えをとりあえず出すときには有効
便利すぎるので，使うと極限の力はつかず，長期的にはマイナスと思って勉強してほしい．

㊑ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ について

$f(x)=e^x-1$，$g(x)=x$ として $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形．

$f'(x)=e^x$，$g'(x)=1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

㊓ ロピタルの定理の一部だけの証明を書いておく．

ロピタルの定理の一部

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ の近くで微分可能として

$f(a)=0$，$g(a)=0$ であり 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ただし $x=a$ の近くでつねに $g(x)\neq 0$

㊔ a の近くで a とは異なる x の値を b とすれば

$f(a)=g(a)=0$ であるから，$\boxed{\text{コーシーの平均値の定理}}$を用いて

$$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が a と b の間に存在する．

このとき $b\to a$ ならば $c\to a$ であるから

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)}{g(b)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$