

数学Ⅲ 極限「関数の極限」

収束する関数の極限 / 正の無限大に発散する関数の極限 /
負の無限大に発散する関数の極限 / 関数の極限はない /
関数の片側からの極限 / $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する / $x \rightarrow \infty$ の関数 $f(x)$ の極限 /
 $x \rightarrow -\infty$ の関数 $f(x)$ の極限 / 収束する2つの関数の極限 /
収束する関数と正の無限大に発散する関数の極限 /
正の無限大に発散する2つの関数の極限 / 分数関数 $\frac{1}{x}$ の極限 /
分数関数 $\frac{1}{x-a}$ の極限 / $x \rightarrow \infty$ の1次以下の関数 $ax + b$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の2次関数 $ax^2 + bx + c$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の3次関数 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ の極限 /
★ $x \rightarrow \infty$ の n 次の整式の極限 / $x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax + b}{px + q}$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s}$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$ の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ の極限 / ★ $x \rightarrow \infty$ の $\frac{\text{整式}}{\text{整式}}$ の極限 /
 $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ ($\infty - \infty$ の不定形) を含む関数の極限 /
分母が0に収束する分数関数の極限が収束する必要条件 /
指数関数 a^x の極限 / $x \rightarrow \infty$ の関数 $a^x - b^x$ ($\infty - \infty$ の不定形) の極限 /
 $x \rightarrow \infty$ の関数 $\frac{k \cdot a^x + l \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x}$ の極限 / 対数関数 $\log_a x$ の極限 /
☆ 対数と極限 / 関数の極限と大小関係 / 関数の追い出しの原理 /
関数のはさみうちの原理 / 絶対値と関数の極限 I /
絶対値と関数の極限 II / 三角関数の極限 / $x \rightarrow 0$ の関数 $\frac{\sin x}{x}$ の極限 /
☆ 三角関数の極限の準公式 / 関数の連続 / 関数の不連続 /
関数の四則計算と連続 / 連続関数 / 区間 / 区間で連続 /
最大値・最小値の原理 / 中間値の定理 / 中間値の定理とグラフの共有点 /
中間値の定理と方程式の実数解の存在 / 自然対数の底 /
自然対数の極限の準公式 / 指数・対数関数の極限 / ★ 合成関数と極限 /

収束する関数の極限

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくととき

$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくとならば

関数 $f(x)$ は α に収束するといふ

α を x が a に限りなく近づくとときの関数 $f(x)$ の **極限值** または **極限** という。

このとき、次のように書き表わす。

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

⑨ $f(x) = x^2$ について、 $x \neq 3$ として、 x が限りなく 3 に近づくととき

$$(2.9)^2, (2.99)^2, (2,999)^2, \dots \rightarrow 3^2 = 9$$

$$(3.1)^2, (3.01)^2, (3,001)^2, \dots \rightarrow 3^2 = 9$$

と $f(x)$ は一定の値 9 に近づくと。

$f(x)$ は 9 に収束するといふ、

x が 3 に限りなく近づくとときの $f(x)$ の極限值は 9 であるといふ。

$$x \rightarrow 3 \text{ のとき } f(x) \rightarrow 9 \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

のように書き表せる。

正の無限大に発散する関数の極限

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、極限は正の無限大であるともいう。

このとき、次のように書き表わす。

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

⑧ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ について、 $x \neq 0$ として、 x が限りなく 0 に近づくとき

$$\frac{1}{(0.1)^2}, \frac{1}{(0.01)^2}, \frac{1}{(0.001)^2}, \dots \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{(-0.1)^2}, \frac{1}{(-0.01)^2}, \frac{1}{(-0.001)^2}, \dots \rightarrow \infty$$

と $f(x)$ の値は限りなく大きくなる。

$f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、極限は ∞ であるともいう。

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

のように書き表せる。

負の無限大に発散する関数の極限

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が負で、その絶対値が限りなく大きくなるならば

$f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、極限は負の無限大であるともいう。

このとき、次のように書き表わす。

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

⑧例 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ について、 $x \neq 0$ として、 x が限りなく 0 に近づくとき

$$-\frac{1}{(0.1)^2}, -\frac{1}{(0.01)^2}, -\frac{1}{(0.001)^2}, \dots \rightarrow -\infty$$

$$-\frac{1}{(-0.1)^2}, -\frac{1}{(-0.01)^2}, -\frac{1}{(-0.001)^2}, \dots \rightarrow -\infty$$

と $f(x) < 0$ で絶対値は限りなく大きくなる。

$f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、極限は負の無限大であるともいう。

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

のように書き表せる。

関数の極限がある場合とない場合

関数 $f(x)$ において

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

のいずれかの場合, $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はある という.

いずれでもない場合, $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない という.

⑧ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$ ならば, 収束し極限は 9

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$ ならば, 発散し極限は正の無限大 (∞)

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ ならば, 発散し極限は負の無限大 ($-\infty$)

発散する場合も極限はある. ただし, ∞ と $-\infty$ は極限值ではない.

関数の片側からの極限

関数 $f(x)$ において

① x が a より大きい値 ($a < x$) をとりながら限りなく a に近づくと

$f(x)$ が限りなく α に近づくならば

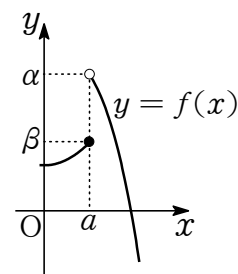
α を x が a に近づくときの $f(x)$ の みぎがわきよくげん 右側極限 といい

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \text{ と表す.}$$

とくに $a = 0$ のときは $\lim_{a \rightarrow +0} f(x) = \alpha$ と表す.

また 極限が正の無限大, 負の無限大となる場合には

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty \text{ のように表わす.}$$



② x が a より小さい値 ($x < a$) をとりながら限りなく a に近づくと

$f(x)$ が限りなく β に近づくならば

β を x が a に近づくときの $f(x)$ の ひだりがわきよくげん 左側極限 といい

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta \text{ と表す.}$$

とくに $a = 0$ のときは $\lim_{a \rightarrow -0} f(x) = \beta$ と表す.

また 極限が正の無限大, 負の無限大となる場合には

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty \text{ のように表わす.}$$

補 $a = 0$ のときは「 $x \rightarrow 0+0$ 」と書かず「 $x \rightarrow +0$ 」と書く.

「 $x \rightarrow 0-0$ 」と書かず「 $x \rightarrow -0$ 」と書く.

補 $\alpha \neq \beta$ ならば $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない

例 $f(x) = [x]$ (x をこえない最大の整数)

について,

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } f(x) = 1$$

であることから

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ の極限はない.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する

右側極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と左側極限 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに存在し、

それらが一致するならば、関数の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する

すなわち

① $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$

② $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

③ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

補 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が存在してもそれらが一致しない場合は極限はない。

すなわち $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しない。

例 ① $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

について、 $x = 1$ では定義できない。

$x \neq 1$ ならば $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 1) = 2$

よって $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

② $f(x) = \frac{1}{x^2}$

について

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = \infty$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

③ $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

について

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$x \rightarrow \infty$ の関数 $f(x)$ の極限

関数 $f(x)$ において

x を限りなく大きくするとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

関数 $f(x)$ は α に収束するといひ、 α を関数 $f(x)$ の極限值といひ。

このとき、次のように書き表わす。

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$$

⑧ 関数 $f(x)$ の x は実数であるが、 $x = n$ として $f(n) = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと数列 $\{a_n\}$ の極限になる。

$x \rightarrow \infty$ の場合は $n \rightarrow \infty$ の場合と同じようなことが成り立つ。

⑨ $f(x) = \frac{1}{x}$ について $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \rightarrow -\infty$ の関数 $f(x)$ の極限

関数 $f(x)$ において

x を限りなく小さくするとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

関数 $f(x)$ は α に収束するといひ、 α を関数 $f(x)$ の極限值といひ。

このとき、次のように書き表わす。

$$x \rightarrow -\infty \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$$

⑩ $f(x) = 2^x$ について $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

⑪ $-\infty$ と区別する意味で ∞ を $+\infty$ と書くことがある。

⑫ 関数 $f(x)$ の極限は $y = f(x)$ のグラフをイメージするとよい。

収束する2つの関数の極限

関数 $f(x)$, $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$$

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3} \text{ をまとめて実数 } s, t \text{ に対して } \lim_{x \rightarrow a} \{s f(x) + t g(x)\} = s \alpha + t \beta$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$$

$$\boxed{5} \quad \beta \neq 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta = 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \text{発散} & (\alpha \neq 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

⑨ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても成り立つ.

⑩ 例 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5f(x) = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 2 + 3 = 5$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 2 - 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{5f(x) + 6g(x)\} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 28$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$$

収束する関数と正の無限大に発散する関数の極限

関数 $f(x)$ が定数 α に収束, $g(x)$ が正の無限大に発散

すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{x \rightarrow a} k g(x) = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = -\infty$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \begin{cases} \infty & (\alpha > 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \\ -\infty & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \text{ は発散}$$

補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ としても成り立つ.

例 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5g(x) = \infty$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = -\infty$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right\} = \infty$$

正の無限大に発散する 2 つの関数の極限

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに正の無限大に発散

すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} \text{ は不定形}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ は不定形}$$

⑧ この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$ としても成り立つ.

⑨ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5f(x) = \infty$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} \text{ は } \infty - \infty \text{ の不定形}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ は } \frac{\infty}{\infty} \text{ の不定形}$$

分数関数 $\frac{1}{x}$ の極限

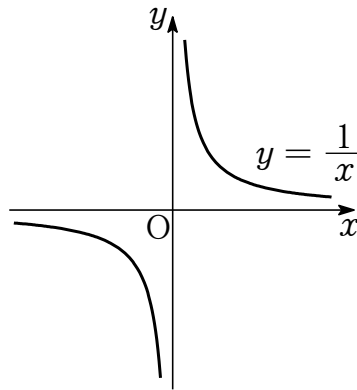
分数関数 $\frac{1}{x}$ の極限は次のようになる。

① $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$

② $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



⊙ $y = \frac{1}{x}$ のグラフを考える。

分数関数 $\frac{1}{x-a}$ の極限

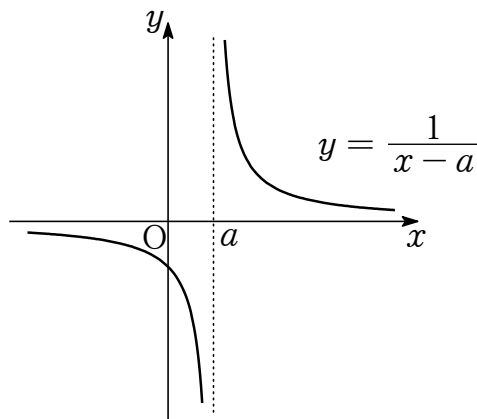
分数関数 $\frac{1}{x-a}$ の極限は次のようになる。

① $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{x-a} = \infty$

② $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-a} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-a} = 0$



⊙ $y = \frac{1}{x-a}$ のグラフを考える。

例 ① $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty$

② $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$x \rightarrow \infty$ の 1 次以下の関数 $ax + b$ の極限

a, b を定数とする. 関数 $ax + b$ の極限について

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ b & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

とくに 関数 $ax + b$ が収束する $\iff a = 0$

④ $y = ax + b$ のグラフを考える.

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) = \infty$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x + 3) = -\infty$

$x \rightarrow \infty$ の 2 次関数 $ax^2 + bx + c$ の極限

a, b, c を定数, $a \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^2 + bx + c) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1) = \infty$

これは, $x \rightarrow \infty$ とすると, x^2 は $x + 1$ に比べて速く大きくなるので, x^2 に着目する.
直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $x^2 + x + 1 \doteq x^2$ 」というイメージをもっておきたい.

具体的な例をあげると

$x = 10^2$ のとき $x^2 + x + 1 = 10^4 + 10^2 + 1 \doteq 10^4$

10, 101 円 (一万百一円) はほぼ一万円というイメージ.

$x = 10^4$ のとき $x^2 + x + 1 = 10^8 + 10^4 + 1 \doteq 10^8$

100, 010, 001 円 (一億一万一円) はほぼ一億円というイメージ.

このように $x + 1$ は x^2 に比べて小さすぎるので, 極限に影響しない.

x^2 の項が極限に最も影響を与えることから, x^2 に着目して変形するとよい.

基本的には, 極限に最も影響を与える項でくくって, 次のように変形する.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right\} = \infty$$

多項式の形の極限だと最高次の項が極限にもっとも影響を与える.

考 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^2 + bx + c \doteq ax^2$ 」

極限に最も影響を与える項は ax^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} \right) \right\}$$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 5x^2 \left(1 - \frac{6}{5x} + \frac{3}{5x^2} \right) \right\} = \infty$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^2 + 6x + 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -5x^2 \left(1 + \frac{6}{5x} - \frac{3}{5x^2} \right) \right\} = -\infty$

$x \rightarrow \infty$ の 3 次関数 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ の極限

a, b, c, d を定数, $a \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

考 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^3 + bx^2 + cx + d \doteq ax^3$ 」

極限に最も影響を与える項は ax^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ ax^3 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} \right) \right\}$$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 6x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 5x^3 \left(1 - \frac{6}{5x} + \frac{3}{5x^2} + \frac{1}{5x^3} \right) \right\} = \infty$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 + 6x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -5x^3 \left(1 - \frac{6}{5x} - \frac{3}{5x^2} - \frac{1}{5x^3} \right) \right\} = -\infty$

★ $x \rightarrow \infty$ の n 次の整式の極限

最高次の係数が a の n 次の整式

$$f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

($a, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ は定数, $a \neq 0$)

について

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

⑧ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \doteq ax^n$ 」
 極限に最も影響を与える項は ax^n

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ ax^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{ax} + \frac{a_{n-2}}{ax^2} + \cdots + \frac{a_1}{ax^{n-1}} + \frac{a_0}{ax^n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax + b}{px + q}$ の極限

a, b, p, q を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px + q} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax + b \doteq ax, px + q \doteq px$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{ax + b}{px + q} \doteq \frac{ax}{px} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px + q} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax \left(1 + \frac{b}{ax}\right)}{px \left(1 + \frac{q}{px}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{ax}}{1 + \frac{q}{px}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を x でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px + q} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{p + \frac{q}{x}} = \frac{a}{p}$$

⑪ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x}}{5 + \frac{6}{x}} = \frac{3}{5}$

$x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ の極限

a, b, c, p, q, r を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^2 + bx + c \doteq ax^2, px^2 + qx + r \doteq px^2$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \doteq \frac{an^2}{pn^2} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right)}{px^2 \left(1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}}{1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を x^2 でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2}} = \frac{a}{p}$$

⑪ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{3}{5}$

$x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s}$ の極限

a, b, c, d, p, q, r, s を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^3 + bx^2 + cx + d \doteq ax^3, px^3 + qx^2 + rx + s \doteq px^3$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s} \doteq \frac{ax^3}{px^3} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right)}{px^3 \left(1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2} + \frac{s}{px^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}}{1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2} + \frac{s}{px^3}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を x^3 でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{px^3 + qx^2 + rx + s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}}{p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2} + \frac{s}{x^3}} = \frac{a}{p}$$

⑪ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + x + 2}{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{5 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{5}$

$x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$ の極限

a, b, p, q, r を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px^2 + qx + r} = 0$$

⑧ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax + b \doteq ax, px^2 + qx + r \doteq px^2$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{ax + b}{px^2 + qx + r} \doteq \frac{ax}{px^2} = \frac{a}{px}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px^2 + qx + r} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax \left(1 + \frac{b}{ax}\right)}{px^2 \left(1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{px} \cdot \frac{1 + \frac{b}{ax}}{1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

直感的には分母が分子より速く絶対値が大きくなるので 0 に収束する.

⑨ 次数が分子よりも分母が大きい多項式の分数の極限は 0 になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を x でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px^2 + qx + r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{px + q + \frac{r}{x}} = 0$$

⑪ (分母と分子を x^2 でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{px^2 + qx + r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2}} = \frac{0}{p} = 0$$

⑫ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{5x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x}}{5x + 6 + \frac{3}{x}} = 0$

⑬ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{5x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{5 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{5} = 0$

$x \rightarrow \infty$ の分数関数 $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ の極限

a, b, c, p, q を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} = \begin{cases} \infty & (ap > 0) \\ -\infty & (ap < 0) \end{cases}$$

④ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $ax^2 + bx + c \doteq ax^2, px + q \doteq px$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q} \doteq \frac{ax^2}{px} = \frac{a}{p}x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right)}{px \left(1 + \frac{q}{px}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{p}x \cdot \frac{1 + \frac{b}{ax}}{1 + \frac{q}{px} + \frac{r}{px^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{a}{p} > 0 \text{ つまり } ap > 0 \text{ のとき } \infty \\ \frac{a}{p} < 0 \text{ つまり } ap < 0 \text{ のとき } -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

直感的には分子が分母より速く絶対値が大きくなるので発散する。

④ 次数が分母よりも分子が大きい多項式の分数の極限は発散する。

下の④のように変形することもできる。

④ (分母と分子を x でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{p + \frac{q}{x}}$$

④ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4 + \frac{2}{x}}{5 + \frac{1}{x}} = \infty$

④ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 4x + 2}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x - 4 + \frac{2}{x}}{5 + \frac{1}{x}} = -\infty$

④ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{-5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4 + \frac{2}{x}}{-5 + \frac{1}{x}} = -\infty$

④ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 4x + 2}{-5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x - 4 + \frac{2}{x}}{-5 + \frac{1}{x}} = \infty$

★ $x \rightarrow \infty$ の $\frac{\text{整式}}{\text{整式}}$ の極限

最高次の係数が a の n 次の整式

$$f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

($a, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ は定数, $a \neq 0$)

最高次の係数が p の m 次の整式

$$g(x) = px^m + p_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2}x^{m-2} + \cdots + p_1x + p_0$$

($p, p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_1, p_0$ は定数, $p \neq 0$)

となる 2 つの整式 $f(x), g(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (n < m) \\ \frac{a}{p} & (n = m) \\ \infty & (n > m, ap > 0) \\ -\infty & (n > m, ap < 0) \end{cases}$$

Ⓚ 直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \doteq ax^n$ 」

$f(x)$ の極限に最も影響を与える項は ax^n

「 $x \rightarrow \infty$ のとき $g(x) = px^m + p_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2}x^{m-2} + \cdots + p_1x + p_0 \doteq px^m$ 」

$g(x)$ の極限に最も影響を与える項は px^m

これらより, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0}{px^m + p_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2}x^{m-2} + \cdots + p_1x + p_0} \doteq \frac{ax^n}{px^m}$$

$$= \begin{cases} n < m \text{ のとき} & \frac{a}{px^{m-n}} \\ n = m \text{ のとき} & \frac{a}{p} \\ n > m \text{ のとき} & \frac{a}{p} x^{n-m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0}{px^m + p_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2}x^{m-2} + \cdots + p_1x + p_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{ax} + \frac{a_{n-2}}{ax^2} + \cdots + \frac{a_1}{ax^{n-1}} + \frac{a_0}{ax^n} \right)}{px^m \left(1 + \frac{p_{m-1}}{px} + \frac{p_{m-2}}{px^2} + \cdots + \frac{p_1}{px^{m-1}} + \frac{p_0}{px^m} \right)} \end{aligned}$$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ ($\infty - \infty$ の不定形) を含む関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ とする.

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ を含む不定形の関数の極限は有理化する.

⑧ $\{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\}\{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\} = f(x) - g(x)$ を利用して根号をはずす.

⑨
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \\ &= \sqrt{1+0} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

⑩
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

★分母が0に収束する分数関数の極限が収束する必要条件

関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ が } \alpha \text{ に収束, つまり } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \text{ とする.}$$

このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

⑩ この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても成り立つ.

⑪ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \cdot \alpha = 0$

⑫ $\frac{0}{0}$ の不定形にならないと収束しないということ.

⑬ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ は4に収束する.

このとき $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ であり $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0$

⑭ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)^2}$ は2に収束する.

このとき $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$ であり $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 - x + 1) = 0$

⑮ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2}$ が収束するとき

$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ であることが必要である.

$x \rightarrow 1$ のとき, $f(x)$ の極限が0でないならば, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2}$ は発散する.

ただし, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ であっても $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2}$ が収束することは言えない.

具体的には $f(x) = x - 1$ とすると $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ であるが

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$$

これは収束しない.

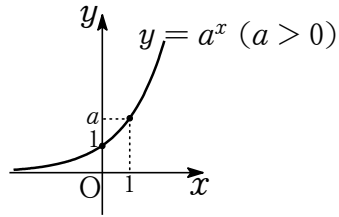
指数関数 a^x の極限

指数関数 a^x の極限は次のようになる.

① $a > 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \infty$$

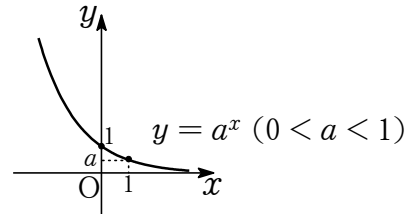
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



② $0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$



③ 考 $y = a^x$ のグラフを考える.

④ 例 ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

$x \rightarrow \infty$ の関数 $a^x - b^x$ ($\infty - \infty$ の不定形) の極限

a, b を相異なる 1 より大きい定数とすると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x - b^x) = \begin{cases} \infty & (a > b > 1) \\ -\infty & (1 < a < b) \end{cases}$$

① $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x) = \infty$

これは、 $x \rightarrow \infty$ とすると、 3^x は 2^x に比べて速く大きくなるということである。

一般的に a^x ($a > 1$) は底 a が大きければ大きいほど、速く大きくなる。

2^x は 3^x に比べて小さすぎるので、極限に影響しない。

3^x の項が極限に最も影響を与えることから、 3^x に着目して変形するとよい。

直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $3^x - 2^x \doteq 3^x$ 」

基本的には、極限に最も影響を与える項でくくって、次のように変形する。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right\} = \infty$$

「 $0 < a < 1$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ 」を利用するように変形することが基本である。

② $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 3^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^x - 1 \right\} = -\infty$

③ $a > b > 1$ のとき

直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $a^x - b^x \doteq a^x$ 」

$0 < \frac{b}{a} < 1$ であることから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x - b^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a^x \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\} = \infty$$

④ $1 < a < b$ のとき

直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $a^x - b^x \doteq -b^x$ 」

$0 < \frac{a}{b} < 1$ であることから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x - b^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} b^x \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^x - 1 \right\} = -\infty$$

$x \rightarrow \infty$ の関数 $\frac{k \cdot a^x + \ell \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x}$ の極限

a, b を相異なる 1 より大きい定数, k, ℓ, p, q を 0 でない定数とすると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^x + \ell \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x} = \begin{cases} \frac{k}{p} & (a > b > 1) \\ \frac{\ell}{q} & (1 < a < b) \end{cases}$$

⊙ $a > b > 1$ のとき

$$0 < \frac{b}{a} < 1$$

a^x と b^x のうち, 極限にもっとも影響するのは a^x であることから

直感的に「 $x \rightarrow \infty$ のとき $k \cdot a^x + \ell \cdot b^x \doteq k \cdot a^x$, $p \cdot a^x + q \cdot b^x \doteq p \cdot a^x$ 」

これより $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{k \cdot a^x + \ell \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x} \doteq \frac{k \cdot a^x}{p \cdot a^x} = \frac{k}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^x + \ell \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^x \left\{ 1 + \frac{\ell}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\}}{p \cdot a^x \left\{ 1 + \frac{q}{p} \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{p} \cdot \frac{1 + \frac{\ell}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^x}{1 + \frac{q}{p} \left(\frac{b}{a} \right)^x} \\ &= \frac{k}{p} \end{aligned}$$

⊕ 分数の極限は分母と分子の極限にもっとも影響する項の比からわかる.

下の ⊙ のように変形することもできる.

⊙ (分母と分子を a^x でわる)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^x + \ell \cdot b^x}{p \cdot a^x + q \cdot b^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k + \ell \left(\frac{b}{a} \right)^x}{p + q \left(\frac{b}{a} \right)^x} = \frac{k}{p}$$

⊕ $1 < a < b$ のときも上と同様である.

⊙ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x}{5 \cdot 3^x + 7 \cdot 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^x}{5 + 7 \left(\frac{2}{3} \right)^x} = \frac{4}{5}$

⊙ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 7 \cdot 5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \left(\frac{3}{5} \right)^x + 3}{5 \left(\frac{3}{5} \right)^x + 7} = \frac{3}{7}$

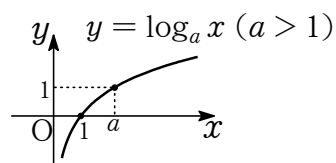
対数関数 $\log_a x$ の極限

対数関数 $\log_a x$ の極限は次のようになる.

① $a > 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \infty$$

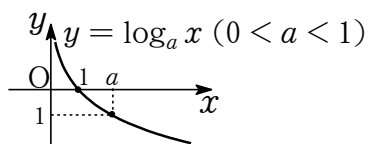
$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$



② $0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$$



③ 考 $y = \log_a x$ のグラフを考える.

④ 例 ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} \log_2 x = -\infty$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$

☆対数と極限

a の近くの x で常に正の値をとる関数 $g(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow a} \log g(x) = \log a \quad \text{ならば} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$$

- ⑧ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても成り立つ.
- ⑧ 考 $\log x$ は連続かつ単調増加であるから成り立つ.
- ⑧ 補 直接極限が求まらないとき, 対数を利用することで極限が求まることがある.
- ⑧ 例 $\lim_{x \rightarrow 1} \log g(x) = \log 3$ ならば $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

収束する 2 つの関数の極限と大小関係

関数 $f(x)$, $g(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ ならば } \alpha \leq \beta$$

補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても同様のことが成り立つ。

注 「 $f(x) \leq g(x)$ 」を「 $f(x) < g(x)$ 」としても $\alpha < \beta$ になるとは限らない。

つまり、「 $f(x) < g(x)$ ならば $\alpha < \beta$ 」は成り立たず、「 $f(x) < g(x)$ ならば $\alpha = \beta$ 」の場合がある。

具体例をあげると $f(x) = x$, $g(x) = x + x^2$

$x \neq 0$ でつねに $f(x) < g(x)$ が成り立つが

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2) = 0$$

すなわち $\alpha = \beta$

注 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに収束する場合に成り立つことなので、

「 $f(x) \leq g(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 」としないこと。

関数の追い出しの原理

関数 $f(x)$, $g(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても同様のことが成り立つ。

補 「追い出しの原理」の言い方は教科書には書かれていない。

補 小さい方が正の無限大に発散するので、追い出されて大きい方も正の無限大に発散する。

補 「原理」と呼ぶのは高校の範囲では証明ができない定理だからで、とりあえず認めて先に進むという配慮である。

例 十分大きな x に対して $x^2 \leq g(x)$ が成り立つならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

関数のはさみうちの原理

関数 $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ について

a の近くの x で常に $f(x) \leq F(x) \leq g(x)$ が成り立つとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \alpha$$

⑧ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても同様のことが成り立つ.

⑧ 補 教科書には「はさみうちの原理」ということがあるとかかかれている.

⑧ 補 同じ極限值をもつ数列にはさまれた数列は同じ極限值をもつ.

⑧ 例 $x > 0$ において $-1 \leq \sin x \leq 1$ が成り立つので, 各辺に $\frac{1}{x}$ をかけて

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

であるから, はさみうちの原理を用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

絶対値と関数の極限 I

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について

a の近くの x で常に $|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つとき

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ならば} \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

⑧ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても同様のことが成り立つ。

⑨ 考 $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ならば、はさみうちの原理を用いて $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

⑩ 例 $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$ が成り立ち、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$

☆絶対値と関数の極限 II

関数 $f(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \quad \text{ならば} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

⑧ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても同様のことが成り立つ。

⑨ 考 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ が成り立ち、 $\lim_{x \rightarrow a} (-|f(x)|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

はさみうちの原理を用いて $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

⑩ 例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

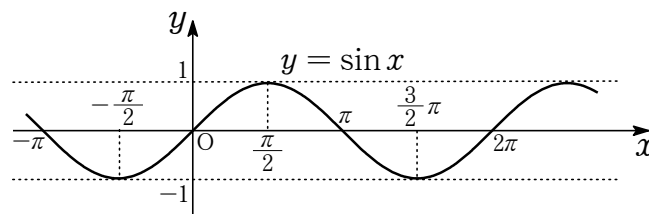
三角関数の極限

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の極限は次のようになる.

① $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

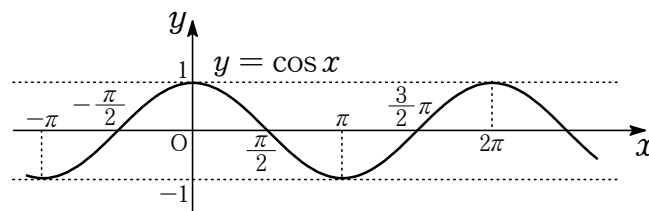
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ の極限はない.



② $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ の極限はない.



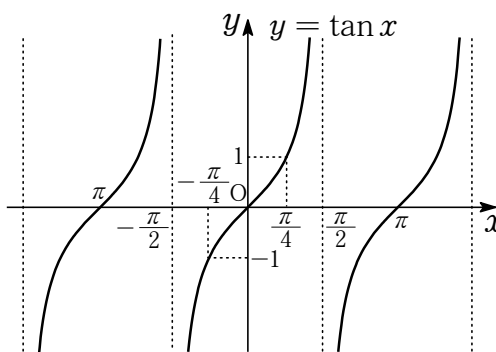
③ $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ の極限はない.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$ の極限はない.



④ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ のグラフをイメージする.

単位円をイメージしてもよい.

関数 $\frac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

つまり 十分小さい x に対して $\sin x \doteq x$

④ ② $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

原点を O とする XY 平面で、単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上に点 $A(1, 0)$ と $\angle AOB = x$ と
なる点 B をとり、直線 OB と直線 $X = 1$ の交点を T とすると

$$B(\cos x, \sin x), T(1, \tan x)$$

$\triangle OAB$, 扇形 OAB , $\triangle OAT$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OA^2 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

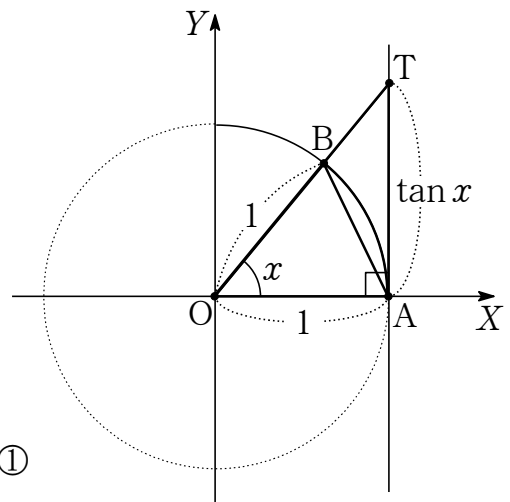
面積の大小関係から $S_1 < S_2 < S_3$ なので

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\sin x > 0, \cos x > 0$ なので $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

ここで $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$

はさみうちの原理を用いて $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots\dots \textcircled{1}$



⑤ $x < 0$ のとき

$x = -t$ とおくと $x \rightarrow -0$ ならば $t \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

よって、②, ⑤ より $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ かつ $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin \square}{\square}$ の極限

$x \rightarrow a$ のとき $\square \rightarrow 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \square}{\square} = 1$

とくに a を 0 , \square を kx ($k \neq 0$) として $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ ($k = 5$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \quad (a \text{ を } \infty, \square \text{ を } \frac{1}{x})$$

☆三角関数の極限の準公式

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{\text{考}} \quad \boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

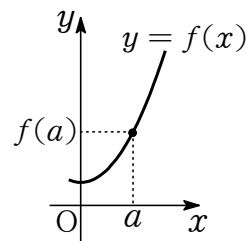
関数の連続

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a において

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在して,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき

$f(x)$ は $x = a$ で れんぞく連続であるという.



なお,

x の値 a が定義域の左端にある場合は

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \text{ が成り立つとき}$$

x の値 a が定義域の右端にある場合は

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \text{ が成り立つとき}$$

それぞれ $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという.

① 例 $f(x) = x^2$ について $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = f(1)$

$f(x)$ は $x = 1$ で連続である.

② 例 $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x \geq 0$ ← x の値 0 は定義域の左端

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = f(0)$$

$f(x)$ は $x = 0$ で連続である.

③ 補 直感的にはグラフを描いてつながっている点は連続である.

厳密に説明するなら極限を使う.

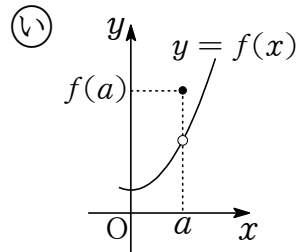
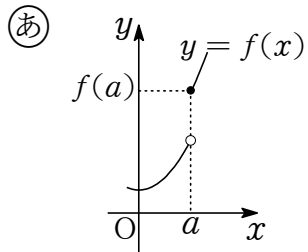
④ 補 高校数学で扱う関数は連続であることが多い.

関数の不連続

関数 $f(x)$ が定義域に属する x の値 a において連続でないとき

$f(x)$ は $x = a$ で ^{ふれんぞく}不連続であるという。

⑧ 不連続のグラフのイメージをあげると次がある。



⑨ については $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在しない。
すなわち $f(x)$ は $x = a$ で不連続。

⑩ については $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在するが、
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ であるから $f(x)$ は $x = a$ で不連続。

関数の四則計算と連続

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに $x = a$ で連続ならば

関数の四則計算 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$

もそれぞれ $x = a$ で連続である.

ただし 商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a) \neq 0$ とする.

⑨ 収束する 2 つの関数の極限の性質からわかる.

⑩ $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ で連続ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

が成り立つ.

このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = f(a) - g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(a) \neq 0)$$

連続関数

関数 $f(x)$ が定義域のすべての x の値で連続であるとき

$f(x)$ は れんぞくかんすう 連続関数である という.

① $f(x) = x$ はすべての実数 x で連続であるから連続関数である.

② $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x \geq 0$

$x \geq 0$ のすべての実数 x で連続であるから連続関数である.

③ $x^2, x^3, \sin x, \cos x, \tan x, 2^x, \log_{10} x, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, |x|, \dots$ はすべて連続関数.

連続関数でないものの例もあげておく.

$f(x)$ が連続関数でないものは定義域内の x の値で連続ではないものを含む関数である.

$f(x) = [x]$ (x をこえない最大の整数) は実数全体で定義される.

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } f(x) = 1$$

であることから

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ であるから $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ は存在しない.

すなわち, $x = 1$ は定義域に属するが, $x = 1$ で $f(x)$ は連続ではない.

よって, $f(x) = [x]$ は連続関数ではない.

区間

不等式を満たす値の範囲を ^{くかん}区間 とい

$a < x < b$ を (a, b) と表し ^{かいくかん}开区間 という.

$a \leq x \leq b$ を $[a, b]$ と表し ^{へいくかん}閉区間 という.

また, 次のようにも表す.

$$a \leq x < b \text{ を } [a, b)$$

$$a < x \leq b \text{ を } (a, b]$$

$$a < x \text{ を } (a, \infty)$$

$$a \leq x \text{ を } [a, \infty)$$

$$x < b \text{ を } (-\infty, b)$$

$$x \leq b \text{ を } (-\infty, b]$$

実数全体を1つの区間と考え $(-\infty, \infty)$

㉠ 开区間 $2 < x < 3$ を $(2, 3)$ と表す.

閉区間 $2 \leq x \leq 3$ を $[2, 3]$ と表す.

$2 \leq x < 3$ を $[2, 3)$ と表す.

$2 < x$ を $(2, \infty)$ と表す.

$x \leq 2$ を $(-\infty, 2]$ と表す.

区間で連続

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての値 x で連続であるとき

$f(x)$ は区間 I で連続である または 区間 I で連続関数であるという.

㉠ $f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $(-\infty, 0), (0, \infty)$ で連続である.

㉠ $f(x) = \sqrt{x}$ は区間 $[0, \infty)$ で連続である.

㉠ $f(x) = [x]$ (x をこえない最大の整数) は連続関数ではないが,
区間 $[0, 1)$ で連続である.

★最大値・最小値の原理

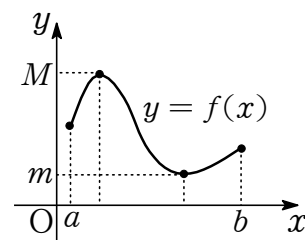
閉区間で連続な関数はその区間で 最大値 および 最小値 をもつ。

すなわち $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は

$f(x) \leq M$ かつ $f(x) = M$ を満たす x が存在し、

$f(x) \geq m$ かつ $f(x) = m$ を満たす x が存在する。

つまり $f(x)$ は最大値 M と最小値 m をもつ。



① 例 関数 $f(x) = x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) は最大値および最小値をもつ。

② 補 最大値・最小値をもつ点は、区間の端点か極値の点に絞られる。

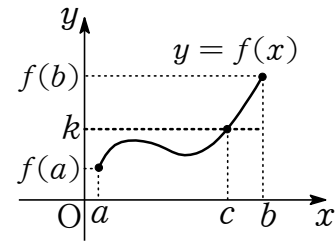
中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$f(c) = k$ となるような実数 c が

a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。



① $f(x) = x^2$ は閉区間 $[0, 2]$ で連続で $f(0) = 0, f(2) = 4$

x を 0 から 2 で動かすと, $f(x)$ は連続なので, 0 から 4 の間のすべての値をとることができる。

k を 0 から 4 の間の値として $f(c) = k$ となる値 $c = \sqrt{k}$ が存在する。

② 体重 120 kg の人は生まれてから体重が 100 kg になる瞬間があった。

③ この定理は式よりもグラフをイメージした方がよい。

中間値の定理とグラフの共有点

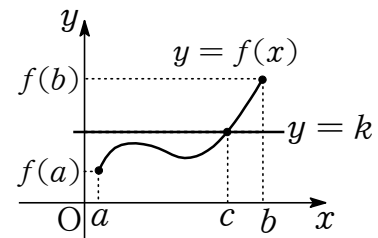
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$$

の 2 つのグラフが

$a < x < b$ に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

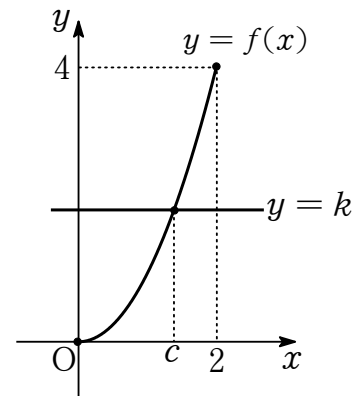


① $f(x) = x^2$ は閉区間 $[0, 2]$ で連続で $f(0) = 0, f(2) = 4$

$0 < k < 4$ として

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = k \end{cases}$$

のグラフは $0 < x < 2$ に 1 つの共有点をもつ。



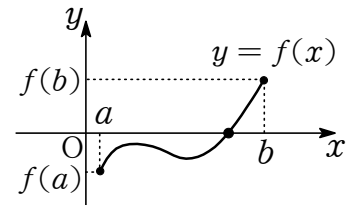
中間値の定理と方程式の実数解の存在

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a, b]$ で連続で

$$f(a) \text{ と } f(b) \text{ が異符号 つまり } f(a)f(b) < 0$$

ならば

方程式 $f(x) = 0$ は a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ.



⑧ 実数解が直接わからなくても実数解の存在を示すことができる.

⑨ 例 $f(x) = 3^x - 4x$ とおくと, $f(x)$ は閉区間 $1 \leq x \leq 2$ で連続である.

$$f(1) = 3 - 4 \cdot 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$$

$f(1)$ と $f(2)$ は異符号である.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

のグラフは $1 < x < 2$ に少なくとも 1 つの共有点をもつ.

よって, 方程式 $3^x - 4x = 0$ は $1 < x < 2$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ.

自然対数の底

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ここで e は無理数で $e = 2.718281828459045\cdots$ と知られている.

底が e である対数 $\log x = \log_e x$ を しぜんたいすう 自然対数 という.

⑨ 数学Ⅲ では $\log_e x$ の底 e は省略し $\log x$ と表す.

e を自然対数の底といい, 無理数である.

⑩ この e は微積分で活躍する.

自然対数の極限の準公式

$$\text{①} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\text{②} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

⑪ $\frac{1}{x} = t$ とおく $x = \frac{1}{t}$
 $t \rightarrow \pm\infty$ とすると $x \rightarrow 0$

$$\text{①} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\text{②} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

⑫ 直感的には $(1+0)^\infty \rightarrow e$

⑬ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$

指数・対数の極限

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\textcircled{\text{考}} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$$

$\textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ で $\log(1+x) = t$ とおくと $1+x = e^t$ すなわち $x = e^t - 1$
 $x \rightarrow 0$ とすると $t \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1}$$

これが1になるから $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$ すなわち $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

★合成関数と極限

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$f(x)$ は連続関数, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(\alpha)$$

⑧ 補 この性質は $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ としても成り立つ.

⑧ 話 無意識のうちに使っている定理かもしれない.

⑧ 例 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x + p) = \sin p$ という当たり前の極限も

$$f(x) = \sin x \text{ は連続関数であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x + p) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} (x + p)\right) = \sin p$$