数学Ⅲ　関数

関数 / 定義域と値域 / 関数の表記 / 分数関数 /
分数関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフ / 分数関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフ /
分数関数 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の変形 / 無理式と無理関数 /
無理関数 $y = \sqrt{ax}$ のグラフ / 無理関数 $y = -\sqrt{ax}$ のグラフ /
無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)} + q$ のグラフ / 逆関数 / 逆関数の求め方 /
逆関数の性質 / ★逆関数が存在する条件 /
合成関数 / 合成関数と逆関数 /

□関数

2 つの変数 x，y があって

x の値（あたい）を定めると それに応じて y の値（あたい）がただ 1 つだけ定まることを

y は x の **関数**（かんすう）という．

例 $y=2x$ の関係は $x=1$ とすると $y=2$ と y の値がただ 1 つだけ定まる．
x の値を定めると y の値が 1 つだけ定まるので「y は x の関数」である．

注 $y^2=x$ の関係は $x=1$ とすると $y^2=1$ であるから $y=\pm1$
これは y の値が 2 つ決まり，y がただ 1 つ決まらないので「y は x の関数」ではない．

□定義域と値域

y が x の関数であるとき

$\boxed{1}$ 変数 x のとりうる値の範囲を
定義域（ていぎいき） または x の**変域**（へんいき） という．

$\boxed{2}$ x が定義域全体を動くとき変数 y がとる値の範囲を
値域（ちいき） または y の**変域**（へんいき） という．

例 関数 $y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$ について
$\boxed{1}$ 定義域は $0\leqq x\leqq 1$
$\boxed{2}$ 定義域 $0\leqq x\leqq 1$ 全体を x が動くときの y のとる値の範囲は $0\leqq y\leqq 2$
値域は $0\leqq y\leqq 2$

□関数の表記

y が x の関数であることを $y=f(x)$ と表す．

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ で表し

$x=a$ のときの 関数 $f(x)$ の 値（あたい） という．

話 「関数」という言葉を導入したのはライプニッツ（1646－1716）で，
その弟子のヨハン・ベルヌーイ（1667－1748）が関数の考え方を整理し，
さらにその弟子のオイラー（1707－1783）が 1734 年に $f(x)$ という形を最初に用いた．
関数の性質を研究する数学の分野を解析学という．

分数関数

分数式で表された関数で分母に変数があるような関数を **分数関数**（ぶんすうかんすう） という.

㊖ $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{2x+1}{x+2}$，$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

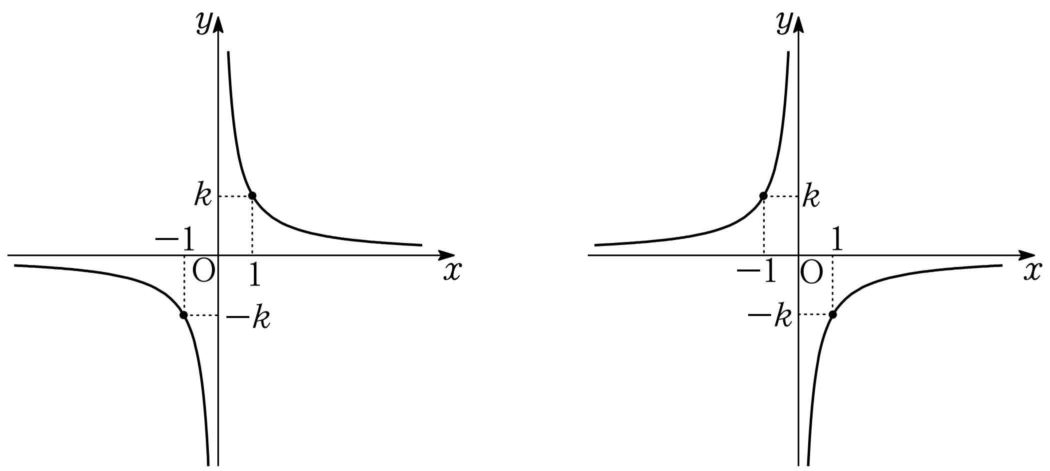
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

座標平面で

分数関数 $y=\dfrac{k}{x}\ (k \fallingdotseq 0)$

のグラフは **直角双曲線**（ちょっかくそうきょくせん）であり，次のような概形となる.

〔$k>0$ のとき〕　〔$k<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $x \fallingdotseq 0$，値域は $y \fallingdotseq 0$

$\boxed{2}$ 漸近線は直交する 2 本の直線 $x=0$ (y 軸)，$y=0$ (x 軸)

$\boxed{3}$ 中心は $(0,\ 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} k>0 \text{ のとき　第} 1,\ 3 \text{象限にある} \\ k<0 \text{ のとき　第} 2,\ 4 \text{象限にある} \end{cases}$

㊟ 「反比例のグラフ」という人がいる.

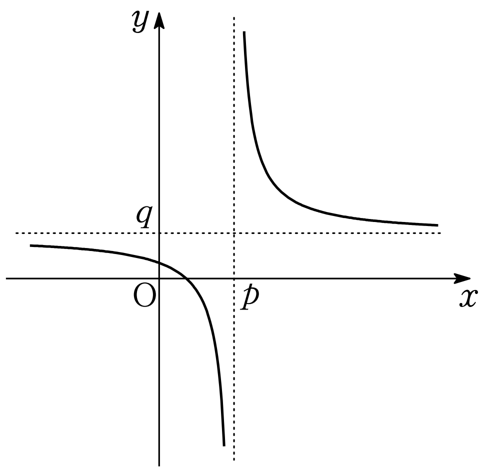
分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

座標平面で

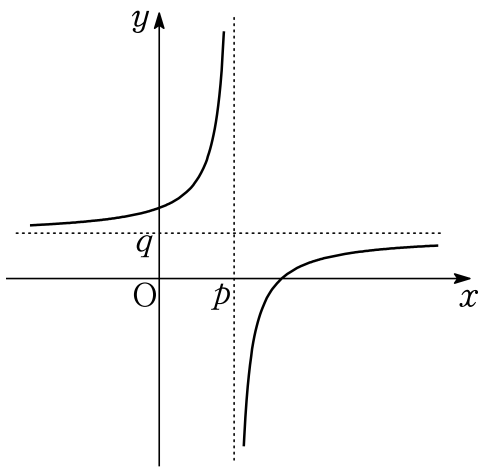
分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k \neq 0)$

のグラフは**直角双曲線**であり，次のような概形となる．

〔$k>0$ のとき〕



〔$k<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$

$\boxed{2}$ 漸近線は直交する 2 本の直線 $x=p$，$y=q$

$\boxed{3}$ 中心は $(p,\ q)$

$\boxed{4}$ $y=\dfrac{k}{x}\ (k \neq 0)$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の変形

$ad-bc \neq 0$，$c \neq 0$ ならば

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形できる．

㊟補 変形するとグラフが描ける．

例 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}$ ←（分子）を（分母）でわる

$=\dfrac{1}{x-3}+2$

無理式と無理関数

根号の中に文字を含む式を **無理式**（むりしき） といい，

無理式で表される関数を **無理関数**（むりかんすう） という．

㊀ $y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{2x+1}$，$y=\sqrt{x^2+x+1}$ を無理関数という．

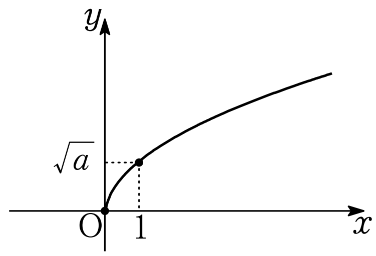
無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

座標平面で

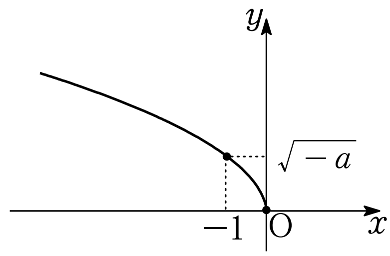
無理関数 $y=\sqrt{ax}$ $(a \neq 0)$

のグラフは **放物線の一部**（ほうぶつせん） であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq 0 & (a>0) \\ x \leqq 0 & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \geqq 0$

$\boxed{3}$ 頂点は $(0,\ 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調増加} & (a>0) \\ \text{単調減少} & (a<0) \end{cases}$

㊟ $y=\sqrt{ax}$ は $y \geqq 0$，$ax \geqq 0$ のもとで両辺 2 乗して $y^2=ax$
これは放物線の一部

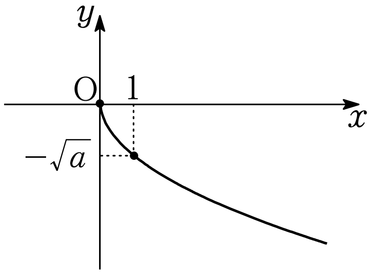
無理関数 $y=-\sqrt{ax}$ のグラフ

座標平面で

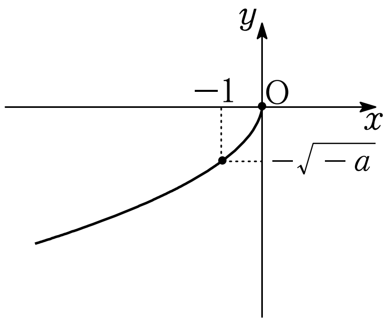
無理関数 $y=-\sqrt{ax}\ (a \fallingdotseq 0)$

のグラフは 放物線(ほうぶつせん)の一部 であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq 0 & (a>0) \\ x \leqq 0 & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \leqq 0$

$\boxed{3}$ 頂点は $(0,\ 0)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調減少} & (a>0) \\ \text{単調増加} & (a<0) \end{cases}$

㊢ $y=-\sqrt{ax}$ のグラフは $y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸に関して対称移動したもの．

㊢ $y=-\sqrt{ax}$ は $y \leqq 0$，$ax \geqq 0$ のもとで両辺 2 乗して $y^2=ax$

これは放物線の一部

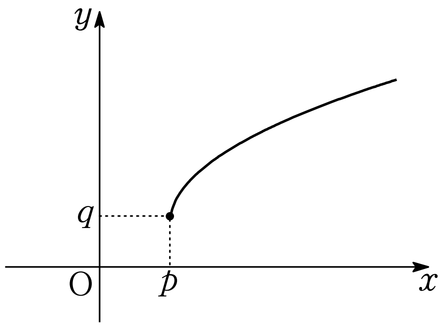
無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフ

座標平面で

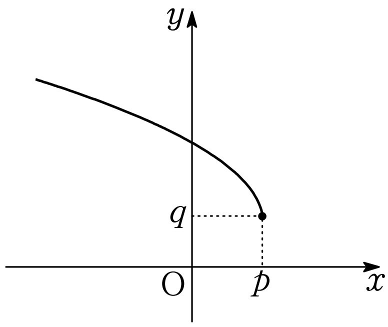
$$無理関数\ y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a \neq 0)$$

のグラフは **放物線（ほうぶつせん）の一部** であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 定義域は $\begin{cases} x \geqq p & (a>0) \\ x \leqq p & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ 値域は $y \geqq q$

$\boxed{3}$ 頂点は $(p,\ q)$

$\boxed{4}$ グラフ は $\begin{cases} \text{単調増加} & (a>0) \\ \text{単調減少} & (a<0) \end{cases}$

$\boxed{5}$ $y=\sqrt{ax}\ \ (a \neq 0)$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

逆関数

関数 $y = f(x)$ の値域に含まれる任意の値に対して，

対応する x がただ 1 つ定まるとき

y の関数 $x = g(y)$ が決まり，関数 $y = f(x)$ の 逆関数（ぎゃくかんすう）という．

x と y を入れかえて $y = g(x)$ と書き $y = f^{-1}(x)$ と表す．

逆関数の求め方

関数 $y = f(x)$ の逆関数 は次の手順で求めることができる．

1 関係式 $y = f(x)$ を変形して $x = g(y)$ の形にする．

（値域のすべての y の値に対して，x がただ 1 つ定まる形にする）

2 x と y を入れかえて $y = g(x)$ とする．

この $g(x)$ が逆関数であり $f^{-1}(x)$ とも表せる．

例 $y = 2^x$ の逆関数を求める．

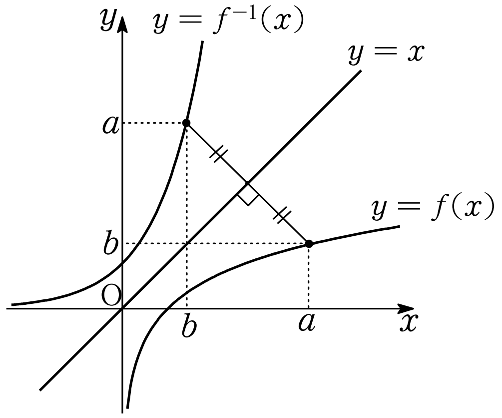
1 $x = \log_2 y \ (y > 0)$

2 x と y を入れかえて $y = \log_2 x \ (x > 0)$

逆関数は $y = \log_2 x \ (x > 0)$

逆関数の性質

関数 $y=f(x)$ と 逆関数 $y=f^{-1}(x)$ について，次のことが成り立つ．



$\boxed{1}$ $b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$

$\boxed{2}$ $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ とでは

定義域と値域が入れかわる

$\boxed{3}$ $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$

の 2 つのグラフは

直線 $y=x$ に関して対称

例 関数 $f(x)=\log_2 x$ と 逆関数 $f^{-1}(x)=2^x$ について

$\boxed{1}$ $b=\log_2 a \iff a=2^b$

$\boxed{2}$ $f(x)$ の定義域は真数条件から $x>0$，値域は実数全体

$f^{-1}(x)$ の定義式は実数全体，値域は $y>0$

$\boxed{3}$ $y=\log_2 x$ と $y=2^x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称．

★逆関数が存在する条件

連続関数 $y=f(x)\ (a \leqq x \leqq b)$ の逆関数が存在する条件は

値域のすべての y の値に対して，x がただ 1 つ定まることから

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が単調増加 または 単調減少 になることである．

例 $y=x^2\ (0 \leqq x \leqq 2)$ について，単調増加であり
$0 \leqq y \leqq 4$ となる y に対して，x がただ 1 つ定まるので逆関数 $y=\sqrt{x}$ が存在する．

例 $y=x^2\ (-2 \leqq x \leqq 0)$ について，単調減少であり
$0 \leqq y \leqq 4$ となる y に対して，x がただ 1 つ定まるので逆関数 $y=-\sqrt{x}$ が存在する．

例 $y=x^2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ について，極小値をもち
$y=1$ とすると $x=\pm 1$ と x がただ 1 つ定まらないので，逆関数は存在しない．

合成関数

2つの関数 $\begin{cases} u = f(x) \\ y = g(u) \end{cases}$

について

関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(u)$ の定義域に含まれているとき

x の関数 $y = g\big(f(x)\big)$ が決まる.

これを $f(x)$ と $g(u)$ の 合成関数（ごうせいかんすう） といい $(g \circ f)(x)$ と表す.

すなわち $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

㊝ 2つの関数を合成して1つの関数にしている.

㊡ $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$

のとき

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

㊟ 基本的に $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ は成り立たない.

㊝ 合成関数の定義域は形に合わせて決まる.

具体例をあげると

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 x \\ g(x) = \sqrt{x - 1} \end{cases}$$

のとき

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(\log_2 x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$$

$f(x)$ の定義域は，真数条件から $\boldsymbol{x > 0}$

$g(x) =$ の定義域は，根号内が0以上より $x - 1 \geqq 0$ なので $\boldsymbol{x \geqq 1}$

合成関数 $(g \circ f)(x)$ の定義域は，根号内が0以上より $\log_2 x - 1 \geqq 0$ なので $\boldsymbol{x \geqq 2}$

合成関数と逆関数

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\big(f(x)\big)=x$

$\boxed{2}$ $(f\circ f^{-1})(x)=f\big(f^{-1}(x)\big)=x$

例 $f(x)=2^x$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\log_2 x$

$\boxed{1}$ $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\big(f(x)\big)=\log_2 f(x)=\log_2 2^x=x$

$\boxed{2}$ $(f\circ f^{-1})(x)=f\big(f^{-1}(x)\big)=2^{f^{-1}(x)}=2^{\log_2 x}=x$