数学Ⅱ　微分法と積分法

平均変化率／ 極限値／ 微分係数／ 導関数の定義／ 極限値／
★導関数の増分／ 導関数の表記／ 微分する／ 関数 x^n の導関数／
定数関数の導関数／ 関数 $(x+\alpha)^n$ の導関数／ 和・差・実数倍の微分／
接線の傾き／ 接線の方程式／ ★法線の方程式／ ★2曲線が接する条件／
区間／ 関数の単調増加・単調減少／ 導関数の符号と関数の増減／ 極値／
関数の増減表／ 3次関数／ 3次関数が極値をもつ条件／ 3次関数のグラフ／
☆極値をもつ3次関数のグラフと8個の合同な長方形／
3次方程式の実数解の個数／
原始関数／ 不定積分／ 積分する／ 関数 x^n の積分／ 関数 $(x+\alpha)^n$ の積分／
和・差・実数倍の不定積分／ 定積分／ 定積分の表記／
和・差・実数倍の定積分 Ⅰ／ 和・差・実数倍の定積分 Ⅱ／
和・差・実数倍の定積分 Ⅲ／ 定積分の性質／ 定積分の基本性質／
定積分の値／ 定積分の導関数（微積分学の基本定理）／
☆積分区間が対称な整式の定積分／ 積分公式（6分の1公式）／
☆積分公式（12分の1公式）／ ☆積分公式（30分の1公式）／
定積分と面積 Ⅰ／ 定積分と面積 Ⅱ／ 定積分と面積 Ⅲ／
☆定積分と面積 Ⅳ／ ☆定積分と面積 Ⅴ／
☆放物線と直線で囲まれる図形の面積／
☆2つの放物線で囲まれる図形の面積／
☆放物線と接線と y 軸に平行な直線で囲まれる図形の面積／
☆放物線と2本の接線で囲まれる図形の面積／
☆同じ形の放物線と共通接線で囲まれる図形の面積／
☆3次関数のグラフと接線で囲まれる図形の面積／
★4次関数のグラフと複接線で囲まれる図形の面積／

平均変化率

関数 $y=f(x)$ において

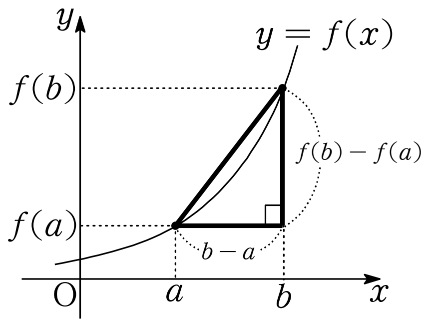
x の値が a から b まで増加するとき

x の変化量 $b-a$

y の変化量 $f(b)-f(a)$

との比

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(=\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}\right)$$



を x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の 平均変化率（へいきんへんかりつ） という.

これは 2 点 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きである.

㊫ 「平均変化率」は「変化の割合」ともいう.

㊣ $y=x^2$ の関係が成り立つとき，x の値が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$f(x)=x^2 \text{ として } \frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\mathbf{4}$$

これは，ある物体が x 秒間に進んだ距離を y m として $y=x^2$ が成り立つならば 1 秒後から 3 秒後までの間の平均の速さが 4 m/秒 であることを表わしている.

極限値

関数 $f(x)$ において

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

$$x\to a \text{ のとき } f(x)\to\alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

とかき，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の 極限値（きょくげんち） という.

㊫ lim は極限を意味する limt に由来する記号で「リミット」と読む.

㊫ x が a に限りなく近づくので $x \neq a$

㊣ $f(x)=x^2$ について $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2=9$

微分係数

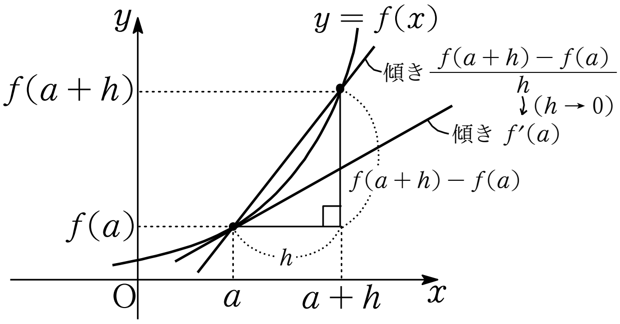
x の値が a から $a+h$ まで変わるときの

関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

h を限りなく 0 に近づけたとき



この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における 微分係数(びぶんけいすう) といい $f'(a)$ で表す.

すなわち

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

㊀ $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

Ⓖ 微分係数とグラフ

導関数の定義

関数 $y=f(x)$ において

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の 導関数(どうかんすう) という.

㊀ $f(x)=x^2$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

このとき $x=a$ とすると $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a$

これは $f(x)$ の $x=a$ における微分係数である.

㊫ 導関数 $f'(x)$ の x の値を定めると，微分係数になる.

★導関数の増分

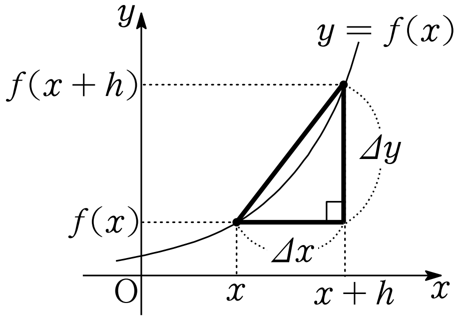
関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

h を x の増分（ぞうぶん）といい $\varDelta x$ と表す.

$f(x+h)-f(x)$ を y の増分（ぞうぶん）といい $\varDelta y$ と表す.

すなわち

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\\
&= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}
\end{aligned}
$$



㊓ $\varDelta \to x$ の のとき $f'(x) \fallingdotseq \dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$

導関数の表記

$y=f(x)$ の導関数を表わす記号として

$$
f'(x),\ \{f(x)\}',\ \bigl(f(x)\bigr)',\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)
$$

などが用いられる.

㊑ x の関数 x^2 の導関数は $2x$ であることを表すのに

$(x^2)'=2x$

$f(x)=x^2$ の導関数は $f'(x)=2x$, $\dfrac{d}{dx}f(x)=2x$

$y=x^2$ の導関数は $y'=2x$, $\dfrac{dy}{dx}=2x$

微分する

x の関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを

$f(x)$ を x で **微分(びぶん)する** という．

㊎ $f(x)=x^2$ の導関数は $f'(x)=2x$

$f(x)=x^2$ を x で微分すると $2x$

関数 x^n の導関数

n が正の整数のとき　$(x^n)'=n\,x^{n-1}$

とくに

$$(x)'=1$$
$$(x^2)'=2\,x$$
$$(x^3)'=3\,x^2$$
$$(x^4)'=4\,x^3$$

㊔ $f(x)=x^n$ について

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^2h^2+\cdots+h^n)-x^n}{h}\quad(\because\ \text{二項定理})\\
&=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^2h+\cdots+h^{n-1})\\
&=nx^{n-1}
\end{aligned}$$

定数関数の導関数

c を定数とすると　$(c)'=0$

㊔ $f(x)=c$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

㊓ $\boxed{x^n\text{ の微分}}$ で $n=0$ として

$$(1)'=(x^0)'=0\cdot x^{-1}=0$$

と考えてもよい．

㊓ 定数を微分すると 0 になる．

㊎ $(3)'=0$

関数 ☆ $(x+\alpha)^n$ の導関数

n が正の整数，α を定数とするとき　$\left\{(x+\alpha)^n\right\}' = n(x+\alpha)^{n-1}$

とくに

$$\left\{(x+\alpha)^2\right\}' = 2(x+\alpha)$$

$$\left\{(x+\alpha)^3\right\}' = 3(x+\alpha)^2$$

$$\left\{(x+\alpha)^4\right\}' = 4(x+\alpha)^3$$

㊄考 $f(x)=(x+\alpha)^n$ について

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+\alpha)^n-(x+\alpha)^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+\alpha)+h\}^n-(x+\alpha)^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+\alpha)^n+{}_n\mathrm{C}_1(x+\alpha)^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2(x+\alpha)^2h^2+\cdots+h^n\}-(x+\alpha)^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{n(x+\alpha)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2(x+\alpha)^2h+\cdots+h^{n-1}\right\}\\
&= n(x+\alpha)^{n-1}
\end{aligned}$$

例 $\left\{(x+1)^2\right\}' = 2(x+1)$

和・差・実数倍の微分

$\boxed{1}$ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\boxed{2}$ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\{k\,f(x)\}'=k\,f'(x)$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\{s\,f(x)+t\,g(x)\}'=s\,f'(x)+t\,g'(x)$$

考 $F(x)=sf(x)+tg(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{sf(x+h)+tg(x+h)-\{sf(x)+tg(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{s\{f(x+h)-f(x)\}+t\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{s\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+t\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\
&=sf'(x)+tg'(x)
\end{aligned}$$

例 $\boxed{1}$ $(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'=3x^2+2x$

$\boxed{2}$ $(x^3-x^2)'=(x^3)'-(x^2)'=3x^2-2x$

$\boxed{3}$ $(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot 2x=6x$

$(4x^3+3x^2)'=4(x^3)'+3(x^2)'=4\cdot 3x^2+3\cdot 2x=12x^2+6x$

接線の傾き

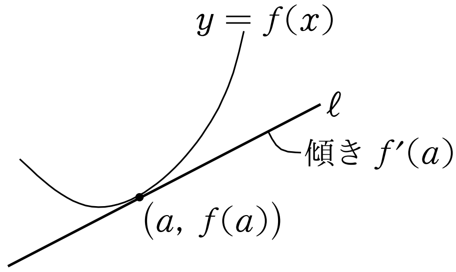
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の傾き は $f'(a)$ に等しい．

つまり

(接線の傾き)＝(導関数に接点の座標を代入した値)



補 接線の傾きは微分係数．

例 $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の傾きは

$f'(x)=2x$ より $f'(1)=2$

接線の方程式

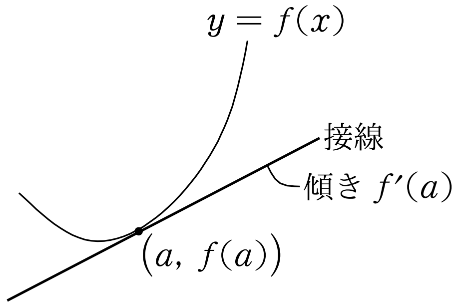
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の方程式 は

$$y=f'(a)\big(x-a\big)+f(a)$$

とくに 点 $\big(a,\ f(a)\big)$ を 接点(せってん) という．



例 $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=f'(1)(x-1)+f(1)\\ &=2(x-1)+1\\ &=2x-1 \end{aligned}$$

★法線の方程式

座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

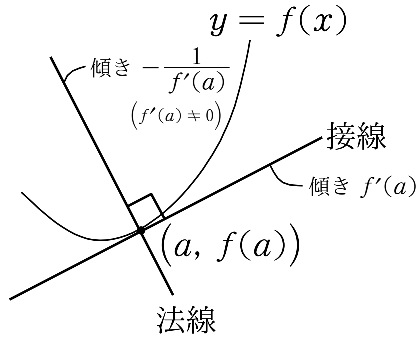
法線の方程式 は

$\boxed{1}$ $f'(a) \fallingdotseq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ のとき

$$x=a$$



法線の方程式の一般形として

$$x+f'(a)y=a+f'(a)f(a)$$

㊜ 法線は接点を通り，接線に直交する直線なので傾きの積が -1 を考える．
ただし $f'(a)=0$ のとき，法線は傾きをもたず，y 軸に平行になる．

㊜ 法線の法線ベクトルは接線の方向ベクトル $\big(1,\ f'(a)\big)$

㊕ $f(x)=x^2$ として，$y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式は

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)\\&=-\frac{1}{2}(x-1)+1\\&=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

★2曲線が接する条件

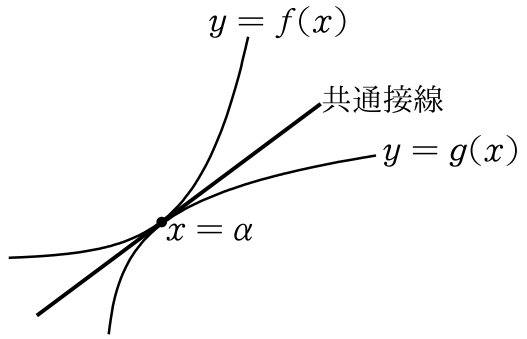
座標平面で

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$

が $x=\alpha$ で共通接線をもつとき

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ は $x=\alpha$ で接するという.

このとき



$\boxed{1}$ $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

を満たす.

$\boxed{2}$ $f(x)$ と $g(x)$ がともに整式のとき

x の方程式 $f(x)-g(x)=0$ は 重解 $x=\alpha$ をもつ.

例 $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=-2x^2+6x-3 \end{cases}$

について

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ は $x=1$ で接する.

$\boxed{1}$ $\begin{cases} f'(x)=2x \\ g'(x)=-4x+6 \end{cases}$

このとき

$\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=2 \end{cases}$

共通接線の方程式は $y=2x-1$

$\boxed{2}$ $f(x)-g(x)=3x-6x+3=3(x-1)^2$

x の方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=1$ を重解にもつ.

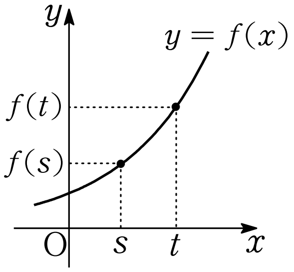
区間

不等式の満たす実数 x の範囲 を 区間(くかん) という.

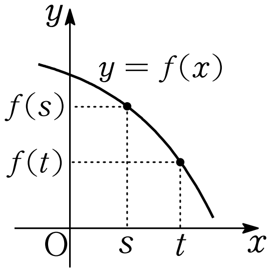
関数の単調増加・単調減少

関数 $f(x)$ において，ある区間の任意の値 s，t について

1



2



1 $s<t$ ならば $f(s)<f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ はその区間で **単調に増加する** という.

2 $s<t$ ならば $f(s)>f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ はその区間で **単調に減少する** という.

例 1 $f(x)=x^2$ $(0<x<2)$ について，s, t $(0<s<t<2)$ に対して $f(s)<f(t)$ が成り立つので，$f(x)$ は区間 $0<x<2$ で単調に増加する.

2 $f(x)=-x^2$ $(0<x<2)$ について，s, t $(0<s<t<2)$ に対して $f(s)>f(t)$ が成り立つので，$f(x)$ は区間 $0<x<2$ で単調に減少する.

導関数の符号と関数の増減

関数 $y = f(x)$ の値の 増減（ぞうげん） は次のようになる．

⊕ $f'(x) > 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は 単調に増加（ぞうか）（$\nearrow$）する．

⊖ $f'(x) < 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は 単調に減少（げんしょう）（$\searrow$）する．

㊫ $f(x)$ が増加する区間で接線を引くと傾きが正になる．
$f(x)$ が減少する区間で接線を引くと傾きが負になる．

(補) $f'(x) = 0$ が常に成り立つならば，$f(x)$ は定数関数であり増減はない．

(例) $f(x) = x^2$ について　$f'(x) = 2x$
$x > 0$ ならば $f'(x) > 0$ であるから，区間 $x > 0$ で $f(x)$ は単調に増加する．
$x < 0$ ならば $f'(x) < 0$ であるから，区間 $x < 0$ で $f(x)$ は単調に減少する．

極値

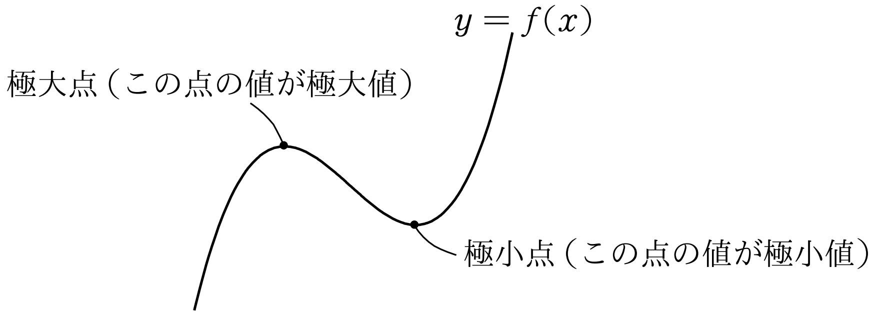
関数 $y = f(x)$ において

1. $x = a$ の前後で $f(x)$ の値が 増加（↗）から 減少（↘）となるとき
$f(x)$ は $x = a$ において 極大（きょくだい） になるという．
そのときの $y = f(x)$ 上の点を極大点（きょくだいてん）といい，値 $f(a)$ を **極大値（きょくだいち）** という．

2. $x = a$ の前後で $f(x)$ の値が 減少（↘）から 増加（↗）となるとき
$f(x)$ は $x = a$ において 極小（きょくしょう） になるという．
そのときの $y = f(x)$ 上の点を極小点（きょくしょうてん）といい，値 $f(a)$ を **極小値（きょくしょうち）** という．

さらに 極大値と極小値を合わせて **極値（きょくち）** という．

㊀例



関数の増減表

関数 $f(x)$ の $f'(x)$ の符号を調べ，次のように表にしたものを**増減表**という．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

上のような増減表だと

$f(x)$ が区間 $x \leqq a$ で単調に減少，$a \leqq x$ で単調に増加することがわかる．

補 グラフの概形は増減表からわかる．

例 $f(x) = x^2$ について　$f'(x) = 2x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3 次関数

x の 3 次式で表される関数を x の **3 次関数** という．

x の 3 次関数 y は a，b，c，d を定数として

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

の形で表される．

例 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

要

関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描くには**増減表**を作る．

例

3 次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について，$y = f(x)$ のグラフを描く．

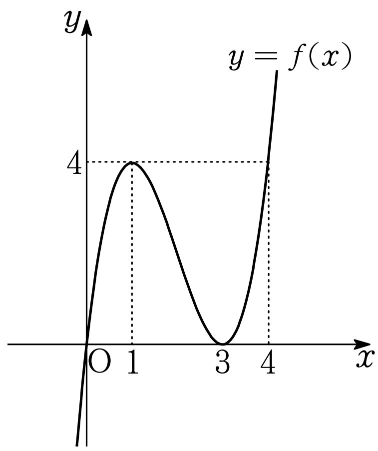
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表をかくと次になる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値 4 $(x = 1)$，極小値 0 $(x = 3)$

グラフは右図．



3 次関数が極値をもつ条件

3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ条件は

x の 2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ

ことである.

㊫ 3 次関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は 2 次関数.

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつと，その前後で $f'(x)$ の符号が変わるので，
極値をもつ.

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもたないと，$f'(x)$ の符号は変わらないないので，
極値をもたない.

㋹ $f(x)=x^3-6x+9x$ は

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2-12x+9\\ &=3(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,3$

2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつので，$f(x)$ は極値をもつ.

㋹ $f(x)=x^3+x$ は

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

$f(x)$ は単調に増加するので，$f(x)$ は極値をもたない.

この場合，2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもたない.

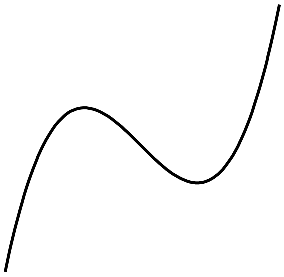
3次関数のグラフ

座標平面で

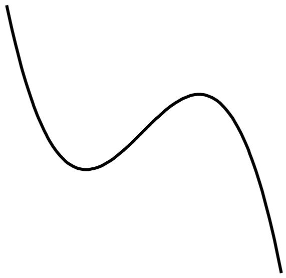
$$3\text{次関数}\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \neq 0)$$

のグラフは点対称な曲線であり，次のような概形になる．

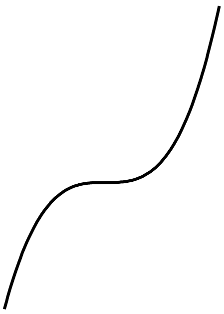
〔$a > 0$，極値ありのとき〕



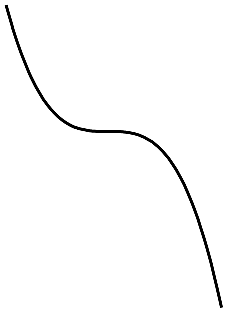
〔$a < 0$，極値ありのとき〕



〔$a > 0$，極値なしのとき〕



〔$a < 0$，極値なしのとき〕



このグラフについて

1. 2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解 $x = \alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ をもつとき，$f(x)$ は極値をもち

$a > 0$ ならば

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a < 0$ ならば

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

2. 2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもたないとき $f(x)$ は極値をもたず

$a > 0$ ならば $f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は単調に増加する．

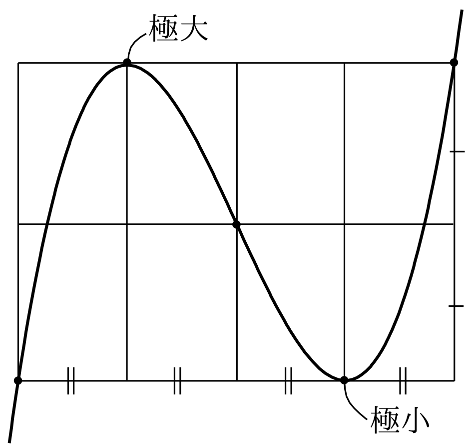
$a < 0$ ならば $f'(x) \leqq 0$ より $f(x)$ は単調に減少する．

3. グラフは点対称でその前後で 凸 性が変わる．

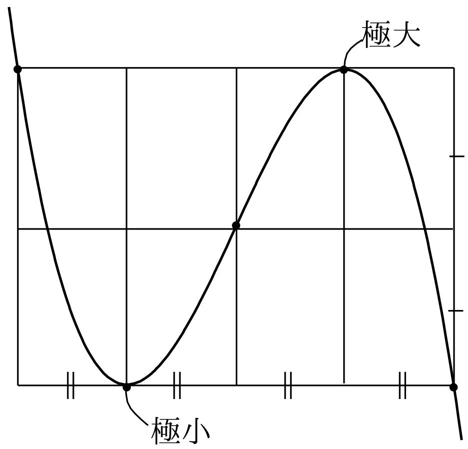
☆極値をもつ３次関数のグラフと８個の合同な長方形

極値をもつ３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d \ (a \neq 0)$ のグラフは下図のように８個の合同な長方形の頂点を通る．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



㊟ 長方形を畳（たたみ）とみて，畳が８枚あることから「畳八帖（じょう）定理」と言う人がいる．

3次方程式の実数解の個数

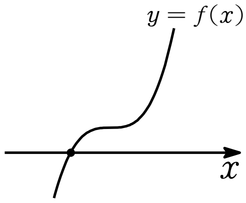
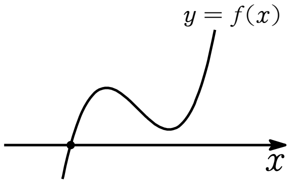
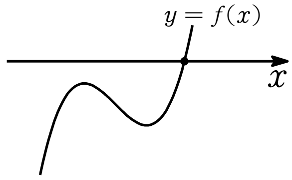
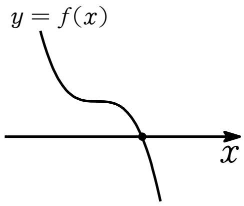
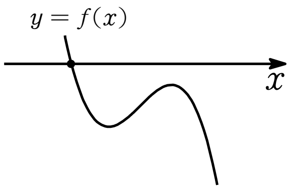
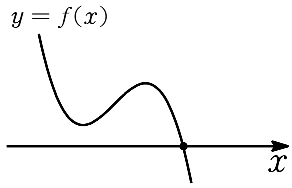
a, b, c, d は実数，$a \neq 0$ とする．

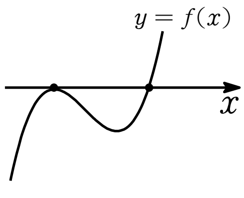
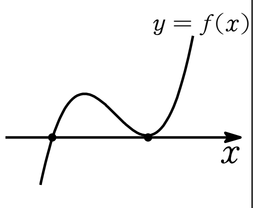
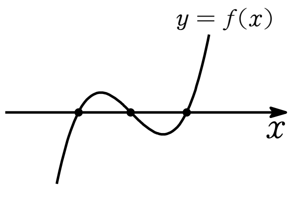
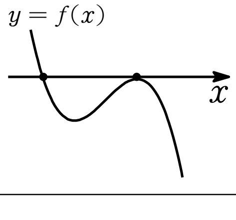
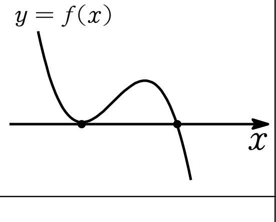
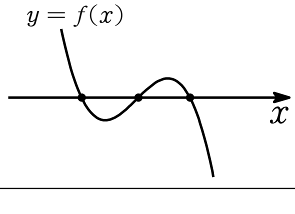
x についての3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の実数解の個数は

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおいて

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \ (x\text{軸}) \end{cases}$$

の2つのグラフの共有点の個数から求まる．

実数解	1個	
極値	なし	あり
$a>0$		 
$a<0$		 
極値の積		(極大値)×(極小値)>0

実数解	2個	3個
極値	あり	あり
$a>0$	 	
$a<0$	 	
極値の積	(極大値)×(極小値)$=0$	(極大値)×(極小値)<0

原始関数

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$

すなわち $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の 原始関数（げんしかんすう）という．

㊪ $(x^2)' = 2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2
$(x^2+1)' = 2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2+1

不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x) = f(x)$

このとき，C を定数として

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表せて

$\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の 不定積分（ふていせきぶん）という．

C を 積分定数（せきぶんていすう）という．

㊞ 記号 $\int$ は「インテグラル」または「積分」と読む．

㊪ $\int 2x\,dx = x^2 + C$（C は積分定数）

積分する

x の関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めることを

$f(x)$ を x で 積分（せきぶん）するという．

㊞ 大雑把に言うと，微分の逆演算が積分．

関数 x^n の積分

n が 0 以上の整数，C を積分定数として

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

とくに

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

関数 $(x+\alpha)^n$ の積分

n が正の整数，α が定数，C を積分定数として

$$\int (x+\alpha)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C$$

とくに

$$\int (x+\alpha)\,dx = \frac{1}{2}(x+\alpha)^2 + C$$

$$\int (x+\alpha)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+\alpha)^3 + C$$

$$\int (x+\alpha)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+\alpha)^4 + C$$

例 $\int (x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C$

和・差・実数倍の不定積分

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, C を積分定数とするとき，

$\boxed{1}$ $$\int\left\{f(x)+g(x)\right\}dx=F(x)+G(x)+C$$

$\boxed{2}$ $$\int\left\{f(x)-g(x)\right\}dx=F(x)+G(x)+C$$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $$\int k\,f(x)\,dx=kF(x)+C$$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$, $g(x)$ と実数 s, t に対して

$$\int\left\{s\,f(x)+t\,g(x)\right\}dx=s\,F(x)+t\,G(x)+C$$

考 $\boxed{1}$ $\left\{F(x)+G(x)\right\}'=f(x)+g(x)$

$\boxed{2}$ $\left\{F(x)-G(x)\right\}'=f(x)-g(x)$

$\boxed{3}$ $\left\{k\,F(x)\right\}'=kf(x)$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int(x^2+x)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int(x^2-x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int 3x^2\,dx=3\int x^2\,dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+C=x^2+C$

例 $\displaystyle\int(3x^2+5x)\,dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2+C=x^3+\frac{5}{2}x^2$

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，2 つの実数 $a,\ b$ に対して 差 $F(b)-F(a)$ を

関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分**（ていせきぶん）といい $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．

a をこの定積分の下端（かたん），b を上端（じょうたん）という．

定積分を求めることを $f(x)$ を a から b まで**積分する**という．

また $F(b)-F(a)$ を記号 $\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b$ で表わす．

定積分の表記

$F'(x)=f(x)$ として

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

(補) $F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ を 1 つ求めて，上端と下端を代入して引く．

(例) $\displaystyle\int_1^2 2x\,dx=\Big[\,x^2\,\Big]_1^2=2^2-1^2=3$

和・差・実数倍の定積分 I

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とするとき，

$\boxed{1}$ $$\int_a^b \left\{f(x)+g(x)\right\}dx=\Big[\,F(x)+G(x)\,\Big]_a^b$$

$\boxed{2}$ $$\int_a^b \left\{f(x)-g(x)\right\}dx=\Big[\,F(x)-G(x)\,\Big]_a^b$$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx=\Big[\,k\,F(x)\,\Big]_a^b$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b \left\{s\,f(x)+t\,g(x)\right\}dx=\Big[\,s\,F(x)+t\,G(x)\,\Big]_a^b$$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)\,dx=\left[\,\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\,\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^2 (x^2-x)\,dx=\left[\,\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x\,\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx=\left[\,3\cdot\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^1=\Big[\,x^3\,\Big]_0^1=1$

例 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+5x)\,dx=\left[\,3\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2\,\right]_0^1=\left[\,x^3+\frac{5}{2}x^2\,\right]_0^1=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

和・差・実数倍の定積分 II

1 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

3 k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b \{s\,f(x)+t\,g(x)\}\,dx = s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx$$

例 1 $\displaystyle\int_1^2 (x^2+x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx$

2 $\displaystyle\int_1^2 (x^2-x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx$

3 $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx$

例 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+5x)\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx + 5\int_1^2 x\,dx$

注 積について $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$ は成り立たない．

補 (右辺) から (左辺) にも変形できるとよいので，念のため下にかいておく．

和・差・実数倍の定積分 III

1 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx$

2 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$

3 k を実数とするとき $\displaystyle k\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,f(x)\,dx$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{s\,f(x)+t\,g(x)\}\,dx$$

和・差・実数倍の定積分 II の (左辺) と (右辺) を入れ替えただけ．

定積分の性質

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

㊂ $F'(x) = f(x)$ とする．

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a) = -\big\{F(a) - F(b)\big\} = -\Big[\, F(x) \,\Big]_b^a$
$\displaystyle = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_c^a + \Big[\, F(x) \,\Big]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$
$\displaystyle = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

㊄
1. $\displaystyle\int_1^1 x^2\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_2^1 x^2\,dx = -\int_1^2 x^2\,dx = -\Big[\, \frac{1}{3}x^3 \,\Big]_1^2 = -\frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = -\frac{7}{3}$
3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \Big[\, \frac{1}{3}x^3 \,\Big]_0^2 = \frac{8}{3}$

定積分の基本性質

定積分は変数の取り方に関係なく同じ値になる．

すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

㊟ 他の変数に変えても意味が変わらない変数のことを「束縛（そくばく）変数」と言う．
定積分の変数は束縛変数である．

㊎ $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1^3) = \frac{7}{3}$

$\displaystyle\int_1^2 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1^3) = \frac{7}{3}$

x^2 の 1 から 2 までの定積分の値は変数の取り方によらず $\dfrac{7}{3}$

すなわち $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \int_1^2 t^2\,dt$

定積分の値

a，b を x によらない定数とする．

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値 は x に無関係な定数である．

㊓ x で積分して b と a を代入して引くので，x に無関係な定数になる．

㊫ $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$ は x に無関係な定数．

定積分の導関数（微積分学の基本定理）

a は定数，$f(x)$ が連続関数のとき $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると $f(x)$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

㊫ $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

ここで $F(a)$ は定数

よって，x で微分すると $f(x)$

㋫ $\displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ を x で微分すると　x^2

すなわち　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t^2\,dt = x^2$

(話) 微分と積分が融合した歴史的な定理のひとつ．

☆積分区間が対称な整式の定積分

m を 0 以上の整数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2m}\,dx = 2\int_{0}^{a} x^{2m}\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2m+1}\,dx = 0$ ← 奇数乗の定積分の値は 0

このことから，p, q, r, s を定数として

$$\int_{-a}^{a}(px^3+qx^2+rx+s)\,dx = 2\int_{0}^{a}(qx^2+s)\,dx$$

補 グラフをかくとわかる．

考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2m}\,dx = \left[\ \frac{1}{2m+1}x^{2m+1}\ \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2m+1}\{a^{2m+1}-(-a)^{2m+1}\}$

$$= \frac{1}{2m+1}(a^{2m+1}+a^{2m+1}) = \frac{2a^{2m+1}}{2m+1} \quad \cdots\cdots①$$

$$2\int_{0}^{a} x^{2m}\,dx = 2\left[\ \frac{1}{2m+1}x^{2m+1}\ \right]_{0}^{a} = \frac{2a^{2m+1}}{2m+1} \quad \cdots\cdots②$$

① = ② であるから $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2m}\,dx = 2\int_{0}^{a} x^{2m}\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2m+1}\,dx = \left[\ \frac{1}{2m+2}x^{2m+2}\ \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2m+2}\{a^{2m+2}-(-a)^{2m+2}\}$

$$= \frac{1}{2m+1}(a^{2m+1}-a^{2m+1} = 0$$

考 $\displaystyle\int_{-a}^{a}(px^3+qx^2+rx+s)\,dx = p\int_{-a}^{a}x^3\,dx + q\int_{-a}^{a}x^2\,dx + r\int_{-a}^{a}x\,dx + s\int_{-a}^{a}dx$

$$= p\cdot 0 + 2q\int_{-a}^{a}x^2\,dx + r\cdot 0 + 2s\int_{-a}^{a}dx$$

$$= 2q\int_{-a}^{a}x^2\,dx + 2s\int_{-a}^{a}dx$$

$$= 2\int_{0}^{a}(qx^2+s)\,dx$$

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^0\,dx = \int_{-1}^{1}dx = 2\int_{0}^{1}dx = 2\Big[\ x\ \Big]_{0}^{1} = 2$

$$\int_{-1}^{1}x^2\,dx = 2\int_{0}^{1}x^2\,dx = 2\left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\,dx = 0$

$$\int_{-1}^{1}x^3\,dx = 0$$

例 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(5x^3+3x^2+8x+1)\,dx = 2\int_{0}^{1}(3x^2+1)\,dx = 2\Big[\ x^3+x\ \Big]_{0}^{1} = 2(1+1) = 4$

積分公式（6 分の 1 公式）

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

考（$x-\alpha$ の形をつくることを考える）

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx\\&=\left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\ \right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

別（展開して積分して因数分解する）

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\&=\left[\ \frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\ \right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

例 $$\begin{aligned}\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx&=-\frac{1}{6}(2-1)^3\\&=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 $$\begin{aligned}\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx&=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}\,dx\\&=-\frac{1}{6}\{1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})\}^3\\&=-\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3\\&=-\frac{8}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

積分公式(12 分の 1 公式)

$\boxed{1}$ $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$\boxed{2}$ $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

考 $\boxed{1}$ $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}$$

$$=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ の α と β を入れ替えて

$$\int_\beta^\alpha (x-\beta)^2(x-\alpha)\,dx=-\frac{1}{12}(\alpha-\beta)^4$$

すなわち $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

考 $\boxed{1}$ $$\int_2^3 (x-2)^2(x-3)\,dx=-\frac{1}{12}(3-2)^4=-\frac{1}{12}$$

$\boxed{2}$ $$\int_2^3 (x-2)(x-3)^2\,dx=\frac{1}{12}(3-2)^4=\frac{1}{12}$$

積分公式（30 分の 1 公式）

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

考

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}\,dx\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx\\
&=\left[\ \frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\ \right]_{\alpha}^{\beta}\\
&=\frac{(\beta-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)^5}{2}+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^5\\
&=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)(\beta-\alpha)^5\\
&=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}$$

例 $\displaystyle\int_{2}^{3}(x-2)^2(x-3)^2\,dx=\frac{1}{30}(3-2)^5=\frac{1}{30}$

定積分と面積 I

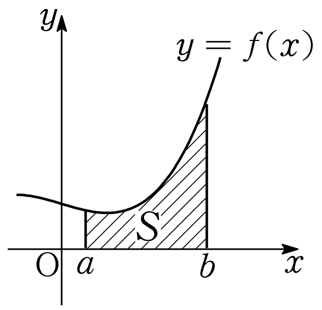
座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ とする．

曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$（x 軸）

および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

$$S = \int_a^b y\,dx \quad \text{または} \quad S = \int_a^b f(x)\,dx$$



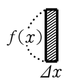
㊓ 厳密な証明は数学 III

㊟ 大雑把な説明を書いておく．

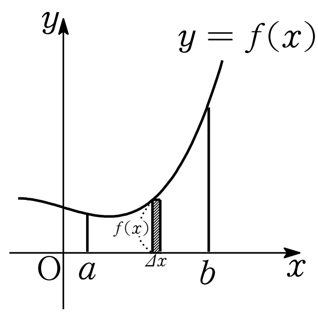
$\int \fallingdotseq S \fallingdotseq \sum$ は「Sum(たし合わせる)」を意味する．

微小面積を $\mathit{\Delta}S$ とすると

微小な世界では曲がった線も直線にみなせるので長方形の面積より

$\mathit{\Delta}S =$  $= f(x) \cdot \mathit{\Delta}x$

$\mathit{\Delta}S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．



定積分と面積 II

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ とする．

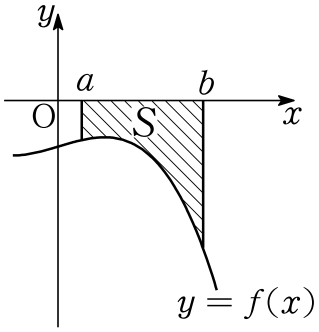
曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$ (x 軸) および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

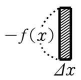
$$S = \int_a^b (-y)\,dx = -\int_a^b y\,dx$$

または

$$S = \int_a^b \left\{-f(x)\right\} dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



㊂ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $-f(x)$ の長方形なので

$\varDelta S =$  $= -f(x) \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (たし合わせて) 面積は求まる．

㊗ $S = -\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ と $y = 0$ (x 軸) および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれた図形の面積の (-1) 倍

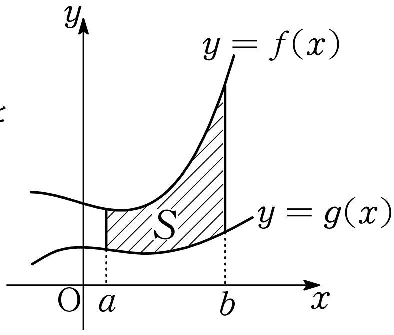
定積分と面積 III

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする．

曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

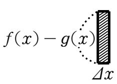


$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_a^b$｛(上の関数)−(下の関数)｝dx

㊓ x 軸は関数 $y=0$ なので，定積分と面積 I，定積分と面積 II の面積も立式できる．

㊔ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $f(x)-g(x)$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\{f(x)-g(x)\}\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

㊓ $S=\displaystyle\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx$ は $y=f(x)-g(x)$ と $y=0$（x 軸）および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

定積分と面積 Ⅳ

座標平面において

連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$ (x 軸) および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

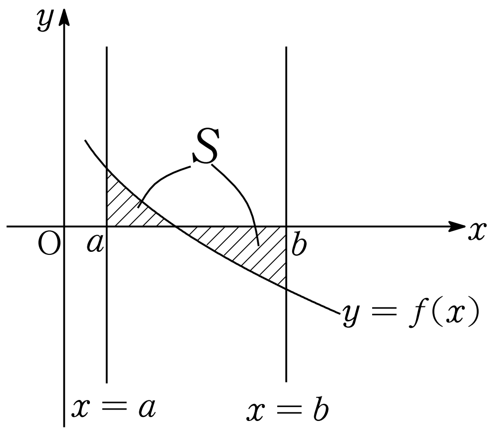
$$S=\int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

つまり (面積) $=\displaystyle\int_a^b$(関数の絶対値)dx

とくに $a \leqq x \leqq b$ において

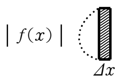
$f(x)$ の正負が変わらないとき

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right| dx=\left|\int_a^b \{f(x)\}\,dx\right|$$



㊫ 面積 S は $f(x) \geqq 0$ の部分と $f(x) \leqq 0$ の部分の面積をそれぞれ求めてたし合わせることで求まるが，絶対値を用いると 1 つの定積分で表せる．

㊮ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x) \leqq 0) \end{cases}$ の長方形なので

$\varDelta S=$ 

$=\left|f(x)\right| \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (たし合わせて) 面積は求まる．

㊫ $S=\displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| dx$ は $y=\left|f(x)\right|$ と $y=0$ (x 軸) および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

㊫ $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ の正負が変わらない」とは

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」のこと．

なお，

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$」の場合は 定積分と面積 Ⅰ

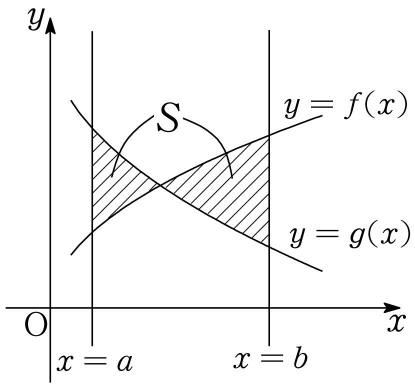
「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$」の場合は 定積分と面積 Ⅱ

☆定積分と面積 V

$a<b$ とする．座標平面において，

曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_a^b$(関数の差の絶対値)$\,dx$

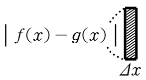
とくに $a\leqq x\leqq b$ において

$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらないとき

$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx=\left|\int_a^b \left\{f(x)-g(x)\right\}dx\right|$$

㊢ 面積 S は $f(x)\geqq g(x)$ の部分と $f(x)\leqq g(x)$ の部分の面積をそれぞれ求めてたし合わせることで求まるが，絶対値を用いると 1 つの定積分で表せる．

㊔ 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left|f(x)-g(x)\right|$ の長方形なので

$\varDelta S=$ 

$=\left|f(x)-g(x)\right|\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（たし合わせて）面積は求まる．

㊢ $a\leqq x\leqq b$ において，$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない」とは
「$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$」または「$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\leqq g(x)$」のこと．
この場合，絶対値記号を外に出せるので，面積公式を作ることができる．

㊢ $S=\displaystyle\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$ は $y=\left|f(x)-g(x)\right|$ と $y=0$（x 軸）および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい．

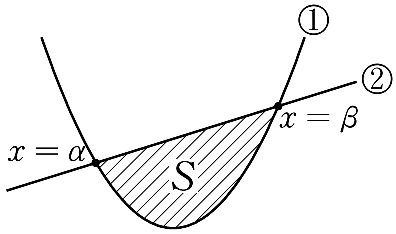
㊢ $y=g(x)$ が $y=0$（x 軸）の場合は $\boxed{\text{定積分と面積 Ⅲ}}$

㊢ $a\leqq x\leqq b$ において，$f(x)$ の正負が変わらない」とは
「$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq 0$」または「$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\leqq 0$」のこと．
なお，
「$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$」の場合は $\boxed{\text{定積分と面積 Ⅲ}}$

☆放物線と直線で囲まれる図形の面積

座標平面において，放物線と直線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = mx + n & \cdots\cdots② \end{cases}$$



① と ② が異なる 2 つの交点をもち，

その x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする.

このとき，① と ② で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

つまり（面積）$= \dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{6} \times (\text{交点の } x \text{ 座標の差})^3$

考 $$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left|(mx+n) - (ax^2+bx+c)\right| dx \\ &= \left|\int_\alpha^\beta \{(mx+n) - (ax^2+bx+c)\}\, dx\right| \\ &= \left|-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx\right| \\ &= \left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right| \\ &= \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

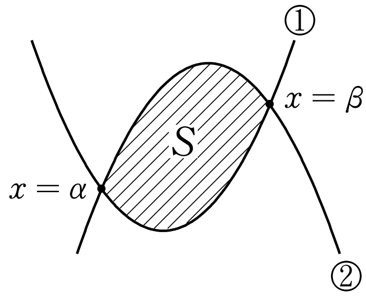
☆2 つの放物線で囲まれる図形の面積

座標平面において，2 つの放物線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = px^2 + qx + r \ (p \neq 0) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① と ② が異なる 2 つの交点をもち，

その x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする．



このとき ① と ② で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a-p|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

つまり（面積）$= \dfrac{(x^2\text{の係数の差})}{6} \times$(交点の x 座標の差$)^3$

考 $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\right| dx$

$$= \left|\int_\alpha^\beta \{(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\}\,dx\right|$$

$$= \left|-(a-p)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{a-p}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$$

$$= \frac{|a-p|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

☆放物線と接線と y 軸に平行な直線で囲まれる図形の面積

座標平面において

放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ を C

C 上の $x=\alpha$ における接線を ℓ

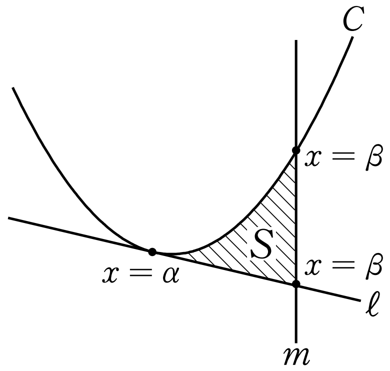
y 軸に平行な直線 $x=\beta\ (\alpha\neq\beta)$ を m とする.

このとき

C, ℓ, m で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3$$

つまり $(\text{面積})=\dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{3}\times(\text{接点と交点の }x\text{ 座標の差})^3$



考 $\ell: y=mx+n$ とする.

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta\left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right|dx\\
&=\left|\int_\alpha^\beta\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\,dx\right|\\
&=\left|a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\,dx\right|\\
&=\left|a\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta\right|\\
&=\left|\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3\right|\\
&=\frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3
\end{aligned}$$

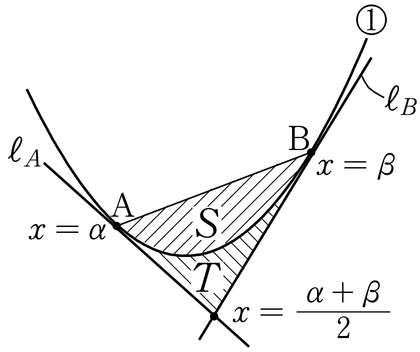
☆放物線と2本の接線で囲まれる図形の面積

座標平面に放物線 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ ……①

① 上の x 座標が $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ となる点をそれぞれ A，B とし，

A，B における ① の接線をそれぞれ ℓ_A，ℓ_B とする．

ℓ_A，ℓ_B の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$



① と直線 AB で囲まれた図形の面積を S

① と ℓ_A，ℓ_B で囲まれた図形の面積を T

とすると

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$T = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

つまり $T = \dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{12} \times (\text{接点の}\,x\,\text{座標の差})^3$

このとき α，β の取り方によらず $S : T = 2 : 1$

㊫ S は 放物線と直線で囲まれる図形の面積

$\ell_A : y = mx + n$，$\ell_B : y = px + q$ とすると

$$\begin{aligned}
T &= \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right| dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left|(ax^2+bx+c)-(px+q)\right| dx \\
&= \left|\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}\, dx\right| \\
&= \left|a\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\, dx\right| + \left|a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\, dx\right| \\
&= \left|a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\right| + \left|a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\right| \\
&= \left|\frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3\right| + \left|\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right| \\
&= \frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3 + \frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

同じ形の放物線と共通接線で囲まれる図形の面積

座標平面に同じ形の放物線

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = ax^2 + Bx + C & \cdots\cdots② \end{cases}$$

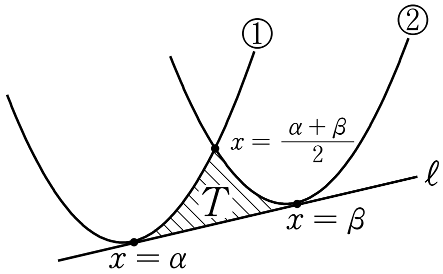
①，② の共通接線を ℓ とし，

①，② と ℓ の接点の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とする.

このとき ①，② の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

①，② と ℓ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$



つまり（面積）$= \dfrac{(x^2\text{の係数の絶対値})}{12} \times (\text{接点の } x \text{ 座標の差})^3$

㊟ $\ell : y = mx + n$ とすると

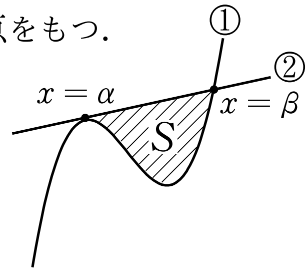
$$\begin{aligned}
T &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right| dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left|(ax^2+bx+c)-(mx+n)\right| dx \\
&= \left| \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\, dx \right| + \left| \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\, dx \right| \\
&= \left| a\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\, dx \right| + \left| a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\, dx \right| \\
&= \left| a\left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \right| + \left| a\left[\ \frac{1}{3}(x-\beta)^3\ \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \right| \\
&= \left| \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 \right| + \left| \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \right| \\
&= \frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3 + \frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

☆3次関数のグラフと接線で囲まれる図形の面積

座標平面に3次関数のグラフと直線

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = mx + n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と②は x 座標が α の点で接し，x 座標が β の点で交点をもつ.



このとき ①と②で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

つまり $(\text{面積}) = \dfrac{(x^3\text{の係数の絶対値})}{12} \times (\text{接点と交点の}\ x\ \text{座標の差})^4$

考 $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(mx+n) - (ax^3+bx^2+cx+d)\right| dx$

$$\begin{aligned} &= \left|\int_\alpha^\beta \{(mx+n)-(ax^3+bx^2+cx+d)\}\,dx\right| \\ &= \left|-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right| \\ &= \left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right| \\ &= \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4 \end{aligned}$$

★4次関数のグラフと複接線で囲まれる図形の面積

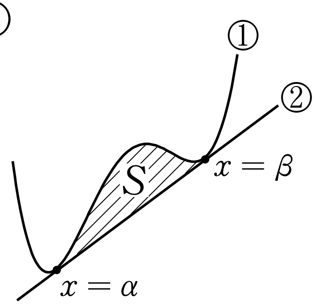
座標平面に4次関数のグラフと直線

$$\begin{cases} y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0) & \cdots\cdots① \\ y = mx + n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と②は x 座標が α，β の異なる2点で接する.

このとき ①と②で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{|a|}{30}(\beta - \alpha)^5$$



つまり（面積）$= \dfrac{(x^4\text{の係数の絶対値})}{30} \times (\text{接点の } x \text{ 座標の差})^5$

考 $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left|(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - (mx + n)\right| dx$

$= \left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - (mx + n)\}\, dx\right|$

$= \left|a\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2(x - \beta)^2\, dx\right|$

$= \left|\dfrac{a}{30}(\beta - \alpha)^5\right|$

$= \dfrac{|a|}{30}(\beta - \alpha)^5$