数学Ⅱ　三角関数

始線と動径 / 一般角 / 一般角と動径 / 角と象限 / 度数法 / 弧度法 /
度数法と弧度法の関係 / 有名角の度数法と弧度法 /
弧度法の扇形の弧の長さと面積 / 三角関数 /
一般角 θ の $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値 / 象限と三角関数の値の正負 /
$\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ の三角比（三角定規の三角比）/
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の有名角の $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値 /
$\pi < \theta \leqq \pi$ の有名角の $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値 /
有名角の $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値 / 三角関数の相互関係 /
値が同じになる三角関数 / $-\theta$ の三角関数 / $\theta+\pi$ の三角関数 /
$\pi-\theta$ の三角関数 / $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数 / $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数 / 周期関数 /
正弦のグラフ / 余弦のグラフ / 正接のグラフ / ★偶関数 / ★奇関数 /
★座標平面の拡大・縮小 / ☆三角関数の周期の公式 / 余弦の加法定理 /
正弦の加法定理 / 正接の加法定理 / 2 倍角の公式 / 半角の公式 /
半角の準公式 / 3 倍角の公式 / 正弦の合成 / ★余弦の合成 /
★積から和・差の公式 / ★和・差から積の公式 / 正接と直線の傾き /
傾きのある 2 直線のなす角と正接 / ☆等しい余弦の角 /
☆等しい正弦の角 / ☆ 2 倍角の三角関数を正接で表す /
☆三角関数を半角の正接で表す /

Ⓒ ささきまこむ

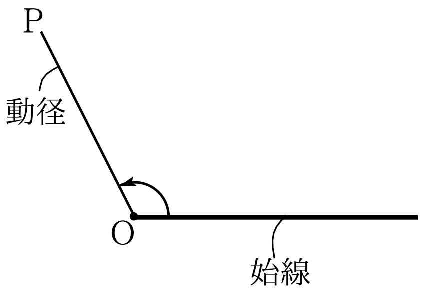
始線と動径

平面上で

点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき

この半直線を **動径**（どうけい）という.

動径の始めの位置を示す半直線を **始線**（しせん）という.

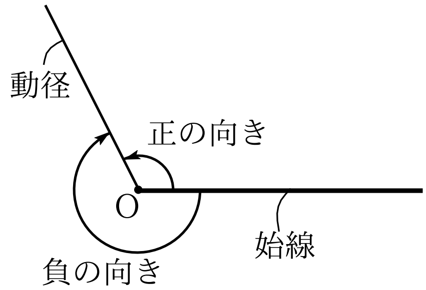


一般角

動径の回転には 2 つの向きがあり

時計の針の回転と逆の向きを **正の向き** という.

時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という.



さらに

動径を始線から正の向きに回転したときの角を **正の角** という.

動径を始線から負の向きに回転したときの角を **負の角** という.

回転の向きと大きさを表す量として，意味を広げて考えた角を **一般角**（いっぱんかく）という.

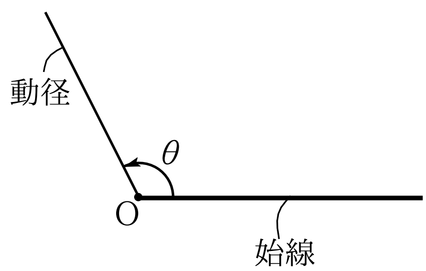
一般角と動径

始線から角 θ だけ回転した位置にある動径を **角 θ の動径** という.

とくに $\theta=\alpha$ が成り立つとき，動径 θ の一般角は

$$\theta=\alpha+360^\circ\times k\ \ (k \text{ は整数})$$

と表せて，これらの角を **動径の表す角** という.



角と象限

座標平面上で，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径について

1. 角 θ の動径が第 1 象限にあるとき，θ を **第 1 象限の角** という.
2. 角 θ の動径が第 2 象限にあるとき，θ を **第 2 象限の角** という.
3. 角 θ の動径が第 3 象限にあるとき，θ を **第 3 象限の角** という.
4. 角 θ の動径が第 4 象限にあるとき，θ を **第 4 象限の角** という.

例
1. 60° は第 1 象限の角
2. 120° は第 2 象限の角
3. 240° は第 3 象限の角
4. 300° は第 4 象限の角

□度数法

直角を 90°（90 度）とし，

直角の $\dfrac{1}{90}$ である 1°（1 度）を単位とする角の大きさの表し方を **度数法**（どすうほう） という.

補 数学 I までに扱っていた角度.

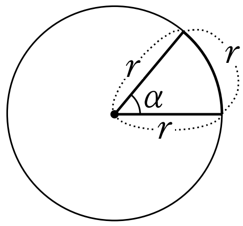
弧度法

1つの円において

半径と等しい長さの弧に対する中心角を単位とする角の表し方を

弧度法（こどほう）という.

右図のような半径 r の円において



弧の長さが r の弧に対する中心角 α は r に無関係に決まる.

この α を 1 ラジアン（1 rad（ラジアン））または 1 弧度 といい，これを単位として角を表す.

ここで　π ラジアン $= 180°$，　1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ ($\fallingdotseq 57.2958°$)

考　1つの円において，弧の長さは中心角に比例するから

$\alpha : 360° = 1 : 2\pi$ $(= r : 2\pi r)$ すなわち　$2\pi\alpha = 360°$

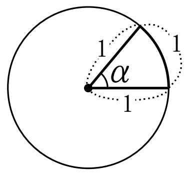
これより　$\alpha = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$　と r に無関係に決まる.

α は r に無関係に決まるので，とくに $r = 1$ として考えてもよい.

要

1 ラジアンとは 半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ のことである.

つまり，1 ラジアンは右図の α であり　1 ラジアン $= \alpha$



半径が 1 の円周の長さは 2π なので　2π ラジアン $= 360°$

度数法と弧度法の関係

$\boxed{1}$ $x^\circ = \dfrac{x}{180}\pi$ ラジアン

$\boxed{2}$ θ ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\theta\right)^\circ$

㊫ $\boxed{1}$ $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアン を x 倍する，

$\boxed{2}$ 1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ を θ 倍する．

有名角の度数法と弧度法

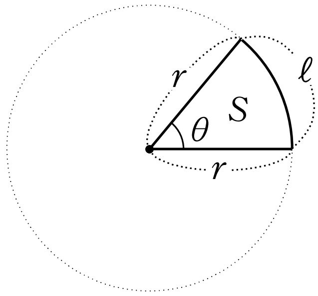
度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π

度数法	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度法	$\dfrac{7}{6}\pi$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\dfrac{11}{6}\pi$	2π

㊟ 基本的に，弧度法では単位のラジアンは省略してかく． $\left(\pi \text{ ラジアン} = \pi\right)$

弧度法の扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ ラジアン の扇形（おうぎ）形 について



1 弧の長さを ℓ とすると

$$\ell = r\theta$$

2 面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}r\ell$$

補 弧度法の定義から成り立つことがわかる．

考 1 弧の長さが中心角に比例するので

$$\ell = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$

2 $S = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

$$= \frac{1}{2}r \cdot r\theta = \frac{1}{2}r\ell$$

例 半径 3，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さを ℓ，面積を S とすると

$$\ell = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi$$

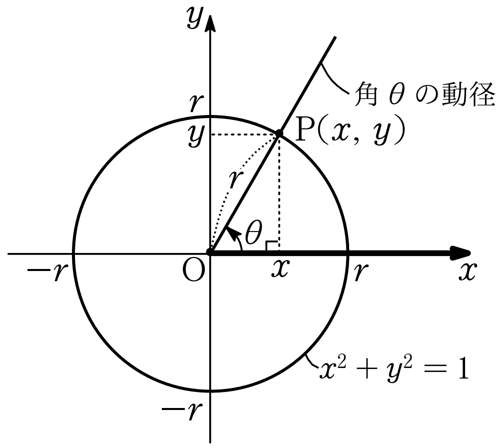
三角関数

座標平面上で

原点 O を中心とする半径 r の円 と

x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の動径

の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として



$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と表す.

$\boxed{1}$ $\cos\theta$ を 一般角 θ の余弦（よげん） または コサイン（cosine） という.

$\boxed{2}$ $\sin\theta$ を 一般角 θ の正弦（せいげん） または サイン（sine） という.

$\boxed{3}$ $\tan\theta$ を 一般角 θ の正接（せいせつ） または タンジェント（tangent） という.

これらはいずれも θ の関数であり，まとめて θ の三角関数（さんかくかんすう） という.

㊫ 数学 I の三角比と同様

一般角 θ の $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

座標平面上で

原点 O を中心とする半径 1 の円（単位円）と

x 軸の正の部分を始線とする**角 θ の動径**

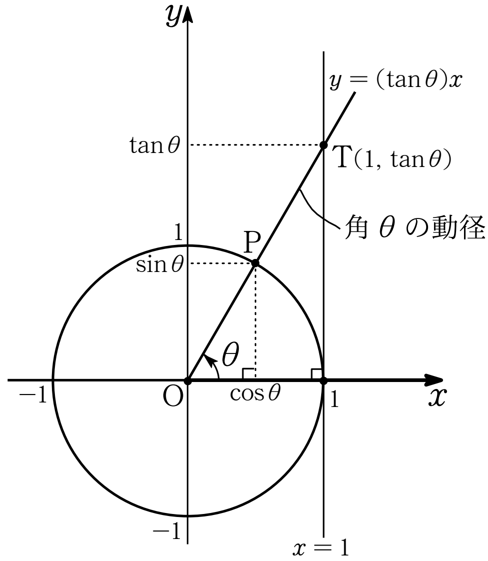
の交点を P とすると　$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$

さらに

点 $(1, 0)$ における円の接線と直線 OP の交点を

T として

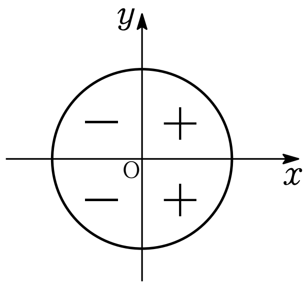
1. 直線 OP の傾きは $\tan\theta$
2. $\mathrm{T}(1, \tan\theta)$



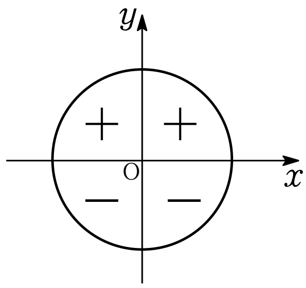
象限と三角関数の正負

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

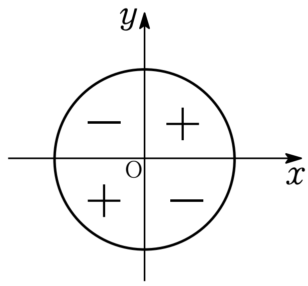
〔$\cos\theta$ の正負〕



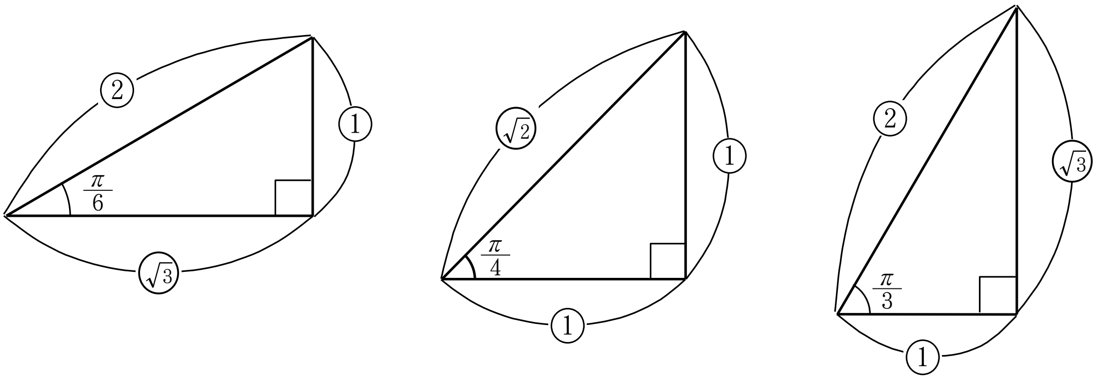
〔$\sin\theta$ の正負〕



〔$\tan\theta$ の正負〕



$\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ の三角比（三角定規の三角比）

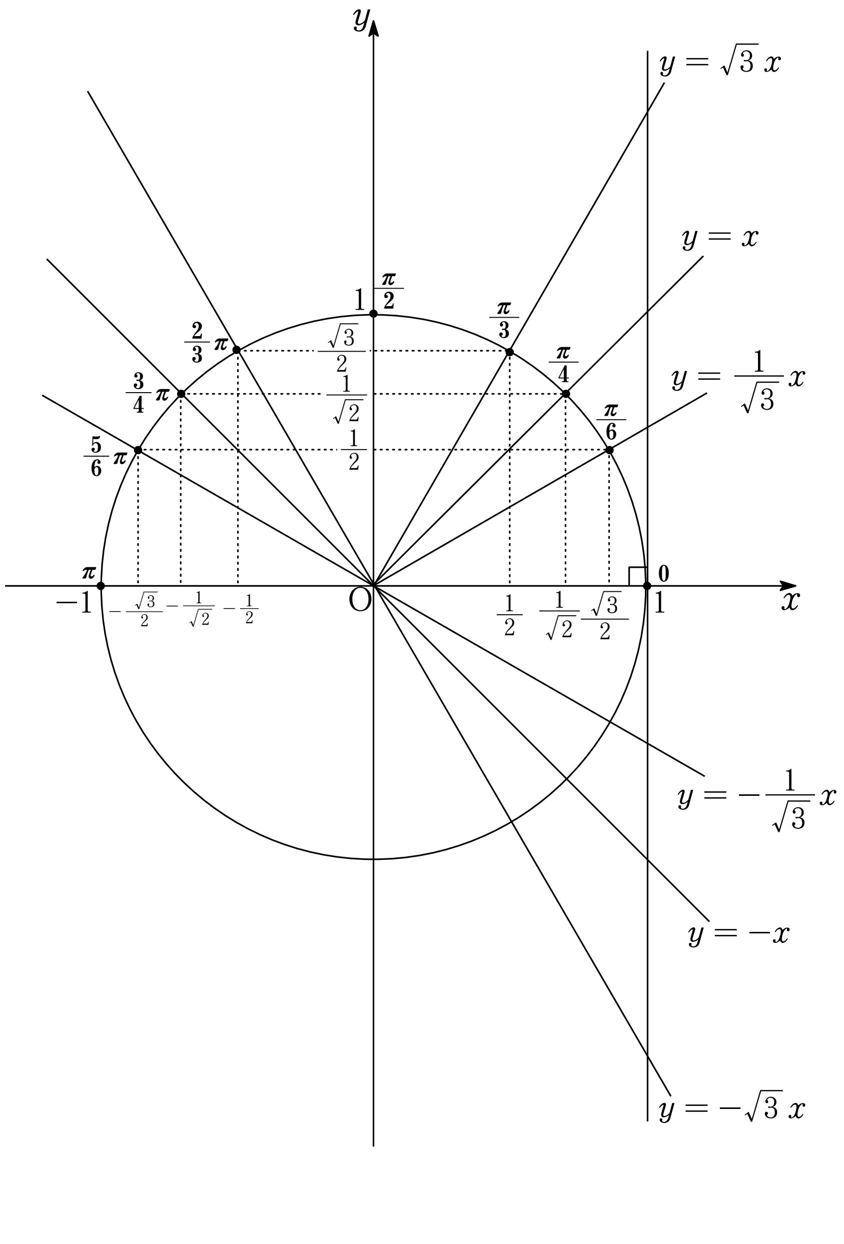


θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の有名角の $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

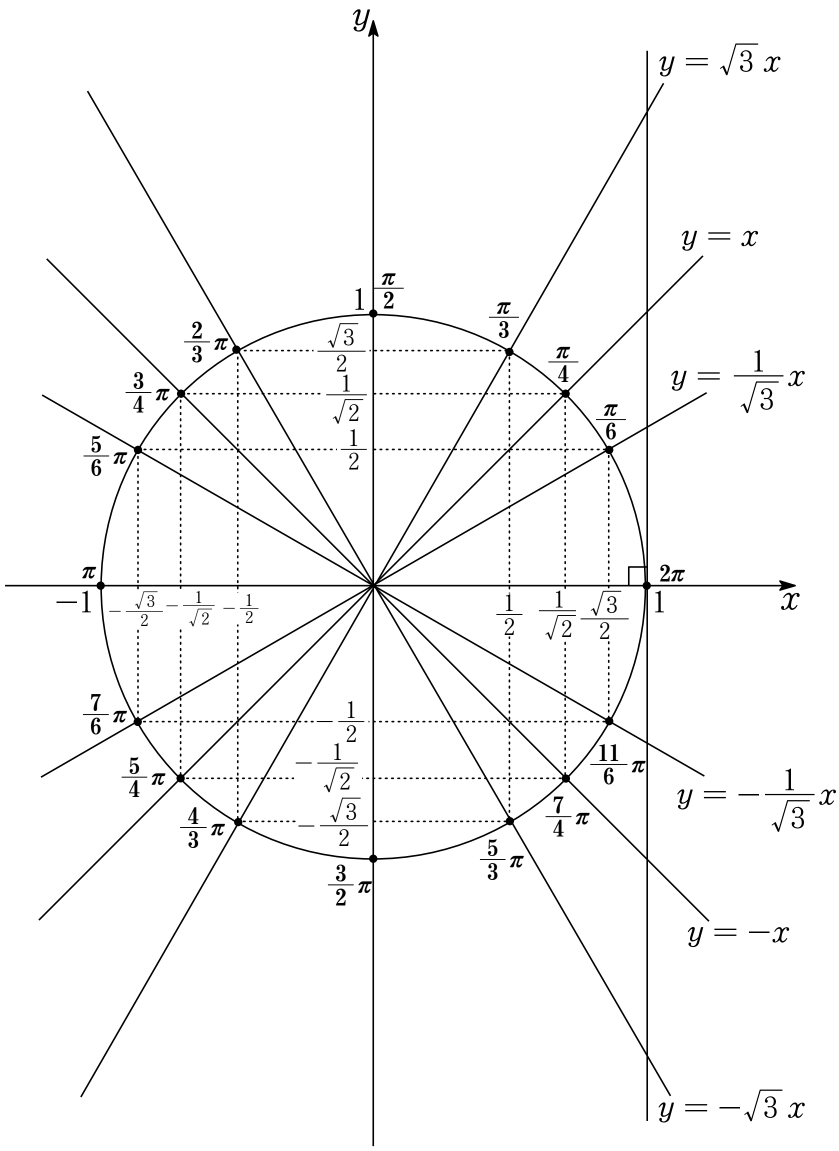
考 下図の単位円と動径を考える．
角は円周上近くに書くことにしている．



$\pi < \theta \leqq 2\pi$ の有名角の $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

θ	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

考 下図の単位円と動径を考える．
角は円周上近くに書くことにしている．

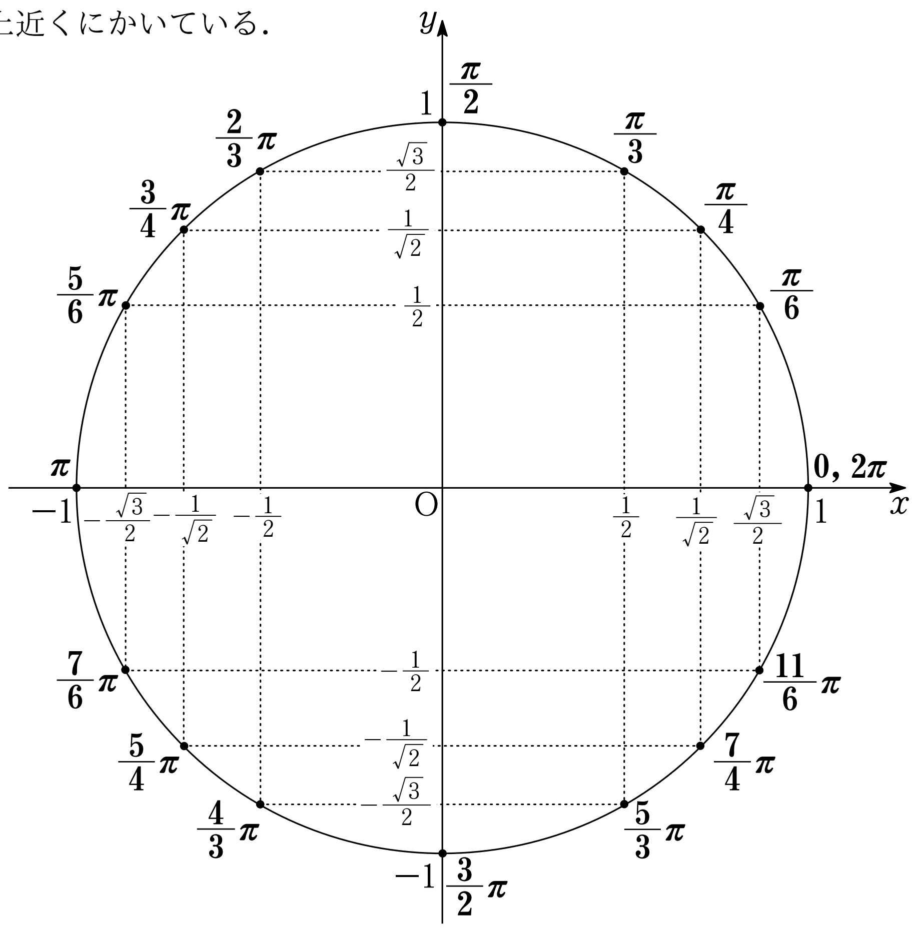


有名角の $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

θ	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

考 角は円周上近くにかいている．



三角関数の相互関係

θ を一般角として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\boxed{2}$ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ （$\cos\theta \neq 0$）

$\boxed{3}$ $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ （$\cos\theta \neq 0$）

$\boxed{4}$ $\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ （$\sin\theta \neq 0$）

$\boxed{5}$ $\dfrac{1}{\tan^2\theta} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ （$\sin\theta \neq 0$）

考 $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\cos^2\theta$ で割って

$$1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\boxed{2}$ より $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{5}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\sin^2\theta$ で割って

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\boxed{4}$ より $\dfrac{1}{\tan^2\theta} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

値が同じになる三角関数

θ を一般角，k を整数とする．

$\boxed{1}$ $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

$\boxed{2}$ $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$

$\boxed{3}$ $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$ （$\cos\theta \fallingdotseq 0$）

㊀ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 角 θ の動径と角 $\theta+2k\pi$ の動径は同じ．

$\boxed{3}$ 角 θ の動径と角 $\theta+k\pi$ の動径の傾きは等しい．

補 $\boxed{1}$ $\cos(\theta-2\pi)=\cos\theta=\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta+4\pi)=\cos(\theta+6\pi)=\cdots$

$\boxed{2}$ $\sin(\theta-2\pi)=\sin\theta=\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta+4\pi)=\sin(\theta+6\pi)=\cdots$

$\boxed{3}$ $\tan(\theta-\pi)=\tan\theta=\tan(\theta+\pi)=\tan(\theta+2\pi)=\tan(\theta+3\pi)=\cdots$

例 $\boxed{1}$ $\cos(-2\pi)=\cos 0=\cos 2\pi=\cos 4\pi=\cdots$

$\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=\sin\frac{5}{2}\pi=\sin\frac{9}{2}\pi=\cdots$

$\boxed{3}$ $\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\frac{9}{4}\pi=\cdots$

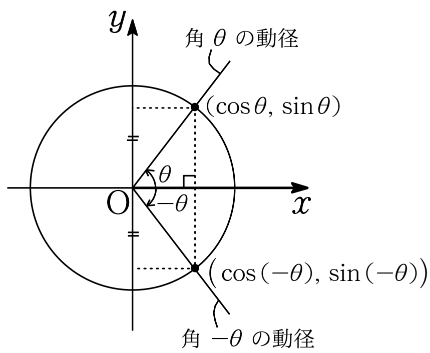
$-\theta$ の三角関数

θ を一般角とする.

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $(\cos\theta \neq 0)$

考 角 θ の動径と角 $-\theta$ の動径は x 軸対称.

右図を考える.



例 1. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3}$

3. $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{3}$

$\theta+\pi$ の三角関数

θ を一般角とする.

1. $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$
2. $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$
3. $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ $(\cos\theta\neq 0)$

㊫ 角 θ の動径と角 $\theta+\pi$ の動径は原点対称.

㊗補 3 $\tan(\theta+\pi)=\dfrac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

㊞例 1 $\cos\dfrac{4}{3}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

2 $\sin\dfrac{4}{3}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\tan\dfrac{4}{3}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\pi-\theta$ の三角関数

θ を一般角とする.

1. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
2. $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
3. $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $(\cos\theta\neq 0)$

㊫ 角 θ の動径と角 $\pi-\theta$ の動径は y 軸対称.

㊗補 3 $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

㊞例 1 $\cos\dfrac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

2 $\sin\dfrac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\tan\dfrac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

θ を一般角とする.

1. $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$
2. $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$
3. $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ （$\sin\theta\fallingdotseq 0$）

㋕ 角 θ の動径と角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の動径は直交する.

㋭ 3 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

㋹ 1 $\cos\dfrac{2}{3}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$

2 $\sin\dfrac{2}{3}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\tan\dfrac{2}{3}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数

θ を一般角とする.

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ （$\sin\theta\fallingdotseq 0$）

㋕ 角 θ の動径と角 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の動径は $y=x$ に関して対称.

㋭ 1 と 2 は sin と cos の変換に使える.

㋭ 3 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

㋹ 1 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

2 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\tan\dfrac{\pi}{3}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

周期関数

関数 $f(x)$ において，0 でない定数 p があり

等式 $f(x+p)=f(x)$ がすべての x に対して成り立つとき

$f(x)$ は p を 周期（しゅうき） とする 周期関数（しゅうきかんすう） という．

p が無数にあると一意に決まらないので，基本的に

p のうち 正で最小のものを 周期 とする．

㊟ $f(x)=\sin x$ において

$$f(x+2\pi)=f(x+4\pi)=f(x+6\pi)=\cdots=f(x)$$

となるので $f(x+p)=f(p)$ を満たす p は $p=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$ と p は無数にある．

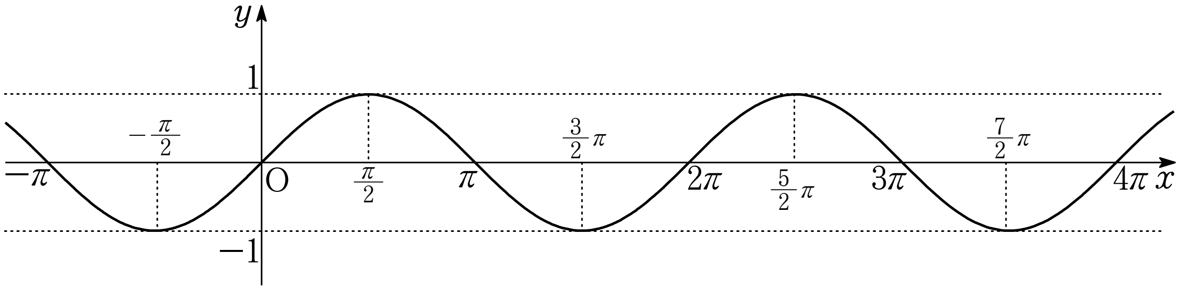
これらのうち正で最小のものは 2π であるから $f(x)=\sin x$ の周期は 2π とする．

正弦のグラフ

座標平面で

$$y = \sin x$$

のグラフは次のような概形になる.



このグラフについて

1. 値域は $-1 \leqq y \leqq 1$
2. 周期は 2π
3. 原点に関して対称

㊟ この曲線を正弦曲線(せいげんきょくせん)という.

㊟ 対称性がいろいろある. 例えば, 点 $(\pi, 0)$ や直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称など.

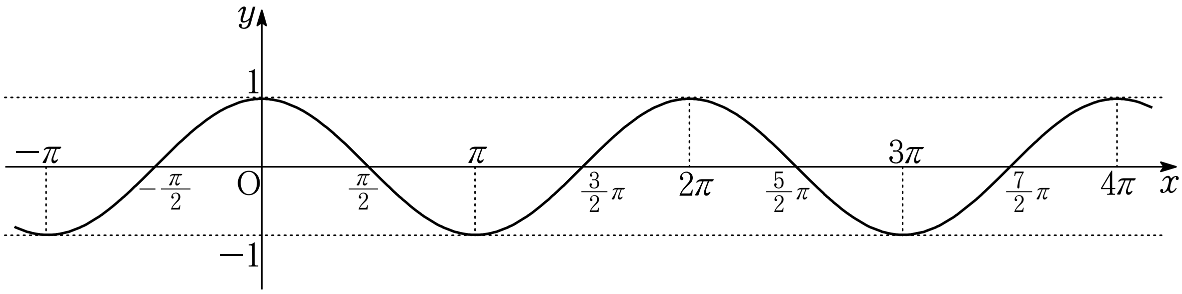
Ⓖ $y = \sin\theta$ のグラフ

余弦のグラフ

座標平面で

$$y = \cos x$$

のグラフは次のような概形になる.



このグラフについて

$\boxed{1}$ 値域は $-1 \leqq y \leqq 1$

$\boxed{2}$ 周期は 2π

$\boxed{3}$ y 軸に関して対称

㊕ $y = \sin x$ のグラフと同じ形である.

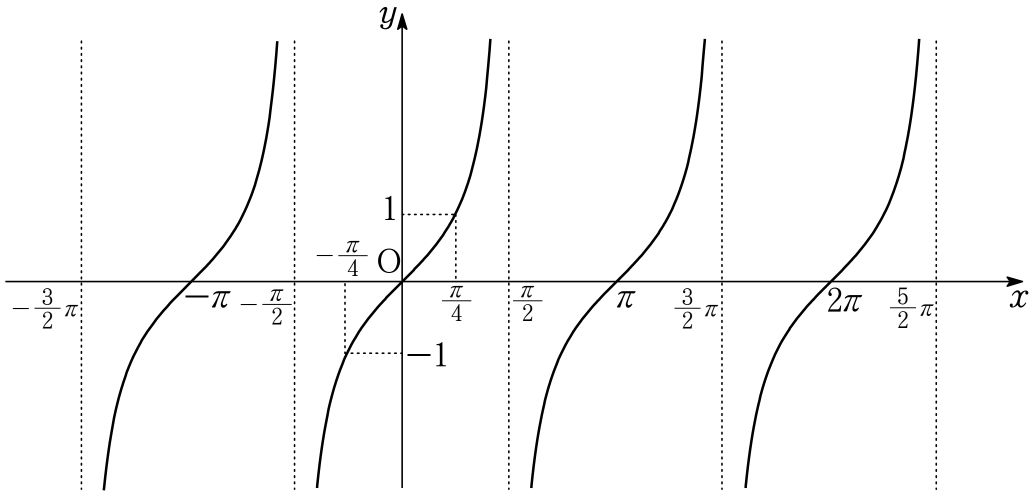
Ⓖ $y = \cos\theta$ のグラフ

正接のグラフ

座標平面で

$$y = \tan x$$

のグラフは次のような概形になる.



このグラフについて

1. 値域は実数全体.
2. 漸近線の方程式は $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
3. 周期は π
4. 原点に関して対称

Ⓖ $y = \tan\theta$ のグラフ

★偶関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 偶関数（ぐうかんすう） という．

偶関数 $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

㊫ 関数 $f(x)=\cos x$ について $\cos(-x)=\cos x$ より $f(-x)=f(x)$ を満たす．
すなわち，$\cos x$ は偶関数である．

㊒ x^2，x^4，$\cos x$，$|x|$，3，$\cdots$ は偶関数

★奇関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 奇関数（きかんすう） という．

奇関数 $y=f(x)$ のグラフは 原点に関して対称である．

㊫ 関数 $f(x)=\sin x$ について $\sin(-x)=-\sin x$ より $f(-x)=-f(x)$ を満たす．
すなわち，$\sin x$ は奇関数である．

㊒ x，x^3，$\sin x$，$\tan x$，$\cdots$ は奇関数

★座標平面上における拡大・縮小

座標平面上において

$\boxed{1}$ 点 $(a,\,b)$ を

y 軸をもとにして x 軸方向に m 倍 $(m>0)$,

x 軸をもとにして y 軸方向に n 倍 $(n>0)$

に拡大または縮小をすると

点 $(ma,\,nb)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

y 軸をもとにして x 軸方向に m 倍 $(m>0)$,

x 軸をもとにして y 軸方向に n 倍 $(n>0)$

に拡大または縮小をすると

$$\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right) \iff y=nf\left(\frac{x}{m}\right)$$

とくに $m=n$ ならば 原点を中心とする拡大または縮小になる.

考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\,y)$ を x 軸方向に m 倍，y 軸方向に n 倍に拡大または縮小した点を
点 $(X,\,Y)$ とすると

$$\begin{cases} mx=X \\ ny=Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=\dfrac{X}{m} \\ y=\dfrac{Y}{n} \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff \frac{Y}{n}=f\left(\frac{X}{m}\right)$$

すなわち，点 $(x,\,y)$ を x 軸方向に m 倍，y 軸方向に n 倍に拡大または縮小した点の集合は

$$\left\{(X,\,Y)\,\middle|\,\frac{Y}{n}=f\left(\frac{X}{m}\right)\right\}=\left\{(x,\,y)\,\middle|\,\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right)\right\}$$

要

座標平面で x を $\dfrac{X}{m}$ y を $\dfrac{Y}{n}$ に置き換えると

x 軸方向に m 倍，y 軸方向に n 倍に拡大または縮小される.

補 点 $\left(\dfrac{x}{m},\,\dfrac{y}{n}\right)$ を x 軸方向に m 倍 $(m>0)$，y 軸方向に n 倍 $(n>0)$ 倍だけ拡大または縮小すると，点 $(x,\,y)$ となる.

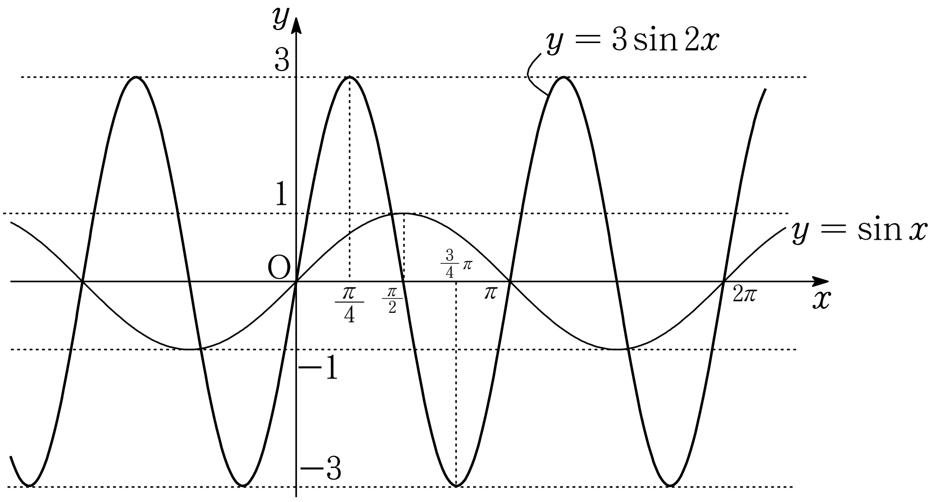
注 1 倍より大きいのが拡大，1 倍より小さいのが縮小である.

例 $y=3\sin 2x$ のグラフについて

$$y=3\sin 2x \iff \frac{y}{3}=\sin\frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$y=\sin x$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍だけ縮小，y 軸方向に 3 倍 だけ拡大したグラフ

なお，周期は $\sin x$ の周期 2π を $\frac{1}{2}$ 倍して $2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$



☆三角関数の周期の公式

a，b，r を定数とし，$a>0$，$r\neq 0$ とする．

$\boxed{1}$ $f(x)=r\sin(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{2\pi}{a}$

$\boxed{2}$ $f(x)=r\cos(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{2\pi}{a}$

$\boxed{3}$ $f(x)=r\tan(ax+b)$ の 周期 は $\dfrac{\pi}{a}$

考 $\boxed{1}$ $f(x)=r\sin(ax+b)=r\sin\left\{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right\}$

$y=r\sin x$ を x 軸方向に $\frac{1}{a}$ 倍すると $y=r\sin ax$ で周期は $2\pi\times\frac{1}{a}=\frac{2\pi}{a}$

これを x 軸方向に $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動したグラフが $y=f(x)$

（平行移動しても周期は変わらない）

例 $\boxed{1}$ $3\sin 2x$ の周期は $\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{2}$ $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

$\boxed{3}$ $\tan\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ の周期は $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

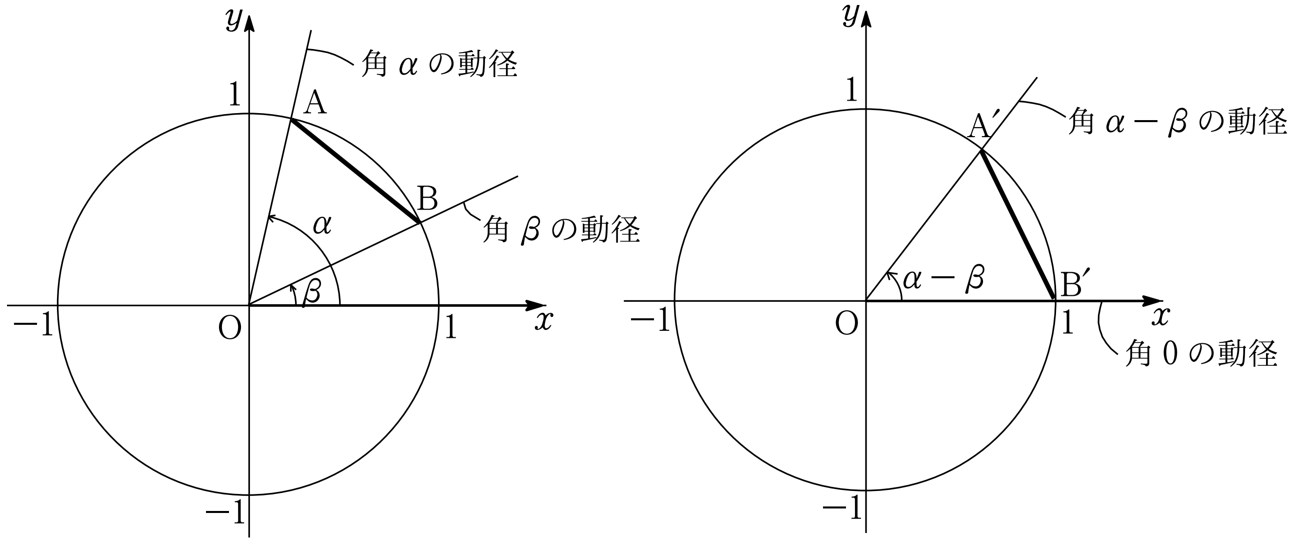
余弦の加法定理

α，β を一般角とする.

$\boxed{1}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

考 $\boxed{1}$



O を原点とする座標平面上で，x 軸の正の部分を始線として，

角 α の動径，角 β の動径と単位円との交点をそれぞれ A，B とすると

　$\mathrm{A}(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta,\sin\beta)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

2 点 A，B を原点 O を中心に $-\beta$ 回転した点をそれぞれ A′，B′ とする.

角 $\alpha-\beta$ の動径と角 0 の動径（始線）と単位円との交点がそれぞれ A′，B′ であるから

　$\mathrm{A}'\big(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\big)$，$\mathrm{B}'(1,0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B'}^2&=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$　であるから　①＝②として

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

よって　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ と置き換えて

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

正弦の加法定理

α，β を一般角とする．

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

考 $\boxed{1}$
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}\\&=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\quad(\because\text{余弦の加法定理})\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ として

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\sin(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

よって　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

正接の加法定理

α，β を一般角とする．

$\boxed{1}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　$(\cos\alpha\cos\beta\neq 0)$

$\boxed{2}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　$(\cos\alpha\cos\beta\neq 0)$

考 $\boxed{1}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\quad\left(\because\text{ 正弦・余弦の加法定理}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\quad(\because\text{ 分母と分子を }\cos\alpha\cos\beta\text{ でわった})$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で β を $-\beta$ として

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

よって　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

補 $\boxed{1}$ と同様にして $\boxed{2}$ も示すことができる．

2倍角の公式

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\boxed{3}$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\boxed{4}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\boxed{5}$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

考 $\boxed{1}$ $\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$ （∵ 正弦の加法）

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$ （∵ 余弦の加法定理）

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ に $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ を代入して

$$\cos 2\theta = \underline{1-\sin^2\theta} - \sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$\boxed{4}$ $\boxed{2}$ に $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ を代入して

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \underline{(1-\cos^2\theta)}$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$\boxed{5}$ $\tan 2\theta = \tan(\theta+\theta)$

$= \dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$ （∵ 正接の加法定理）

$= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

半角の公式

1 $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

2 $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

3 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

考 1 $\boxed{\text{2 倍角の公式}}$より $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

すなわち $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

この式で $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

2 $\boxed{\text{2 倍角の公式}}$より $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

すなわち $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

この式で $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

3 $$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}\quad(\because \boxed{1},\ \boxed{2})$$
$$=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

半角の準公式

1 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

2 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3 $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

考 $\boxed{\text{半角の公式}}$で $\theta=2\alpha$ としている.

3 倍角の公式

$\boxed{1}$ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\boxed{2}$ $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

考 $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \quad \left(\because \boxed{\text{正弦の加法定理}}\right)\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \quad \left(\because \boxed{\text{2 倍角の公式}}\right)\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

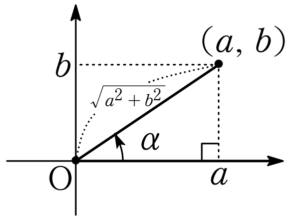
$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \quad \left(\because \boxed{\text{余弦の加法定理}}\right)\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \quad \left(\because \boxed{\text{2 倍角の公式}}\right)\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta\end{aligned}$$

正弦の合成

a、b を $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ となる実数の定数とする．

$$a \sin\theta + b \cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

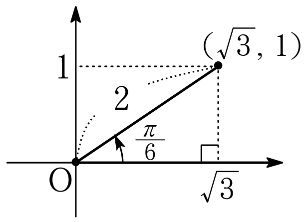


㊕ $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta \cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta \cdot \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$ （∵ 正弦の加法定理 ）

㊞ $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$

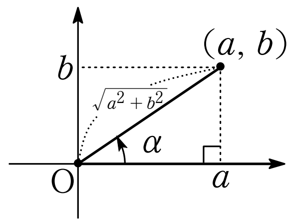


★余弦の合成

a、b を $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ となる実数の定数とする．

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

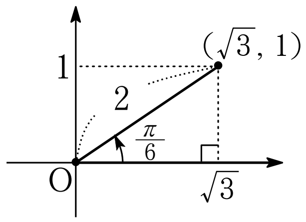


㊟考 $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\theta\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$（∵ 余弦の加法定理）

㊟例 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$



★積から和・差の公式

$\boxed{1}$ $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{2}$ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{3}$ $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{4}$ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

考 正弦・余弦の加法定理より

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$ ……①

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$ ……②

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$ ……③

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$ ……④

$\boxed{1}$ (①＋②)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{2}$ (①－②)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{3}$ (③＋④)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{4}$ (③－④)$\times\dfrac{1}{2}$ として $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

★和・差から積の公式

$\boxed{1}$ $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{2}$ $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{3}$ $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{4}$ $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

考 正弦・余弦の加法定理 より

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ……③
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ……④

$\begin{cases}\alpha+\beta=A\\ \alpha-\beta=B\end{cases}$ とおくと $\begin{cases}\alpha=\dfrac{A+B}{2}\\ \beta=\dfrac{A-B}{2}\end{cases}$ ……⑤

$\boxed{1}$ ①＋② として $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$
⑤ より $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{2}$ ①－② として $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$
⑤ より $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{3}$ ③＋④ として $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$
⑤ より $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

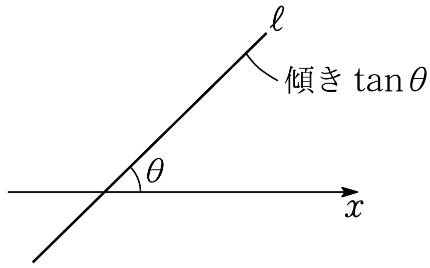
$\boxed{4}$ ③－④ として $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$
⑤ より $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

正接と直線の傾き

座標平面で

x 軸正方向と直線 ℓ のなす角を θ $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

ℓ の傾きは $\tan\theta$



傾きのある 2 直線のなす角と正接

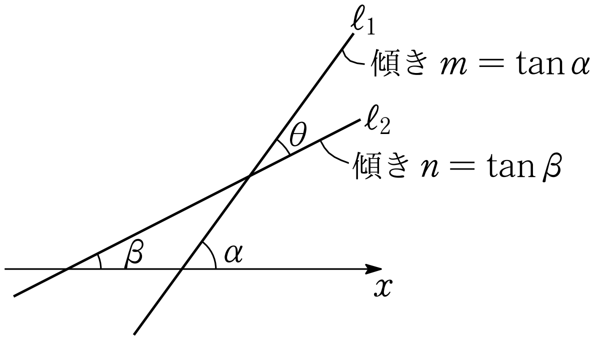
座標平面に

平行でない 2 本の直線 ℓ_1，ℓ_2 がある．

ℓ_1，ℓ_2 の傾きをそれぞれ m，n とし

x 軸正方向とのなす角をそれぞれ α，β

ただし $\alpha > \beta$ とする．



このとき ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ として，次が成り立つ．

1. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ つまり $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき $mn = -1$ ← 傾きの積が -1
2. $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta = \dfrac{m-n}{1+mn}$

考 1 直交条件

2 $\tan\alpha = m$，$\tan\beta = n$，$\theta = \alpha - \beta$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m-n}{1+mn}$$

要

傾きをもつ 2 本の直線

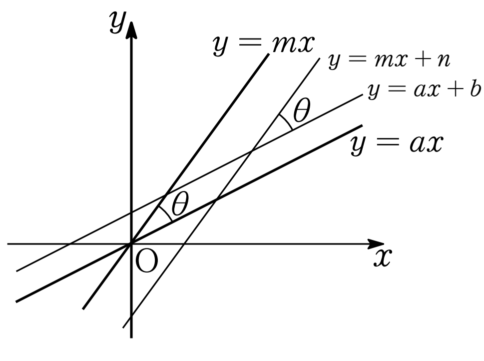
$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = ax + b \end{cases}$$

のなす角 θ は

$$\begin{cases} y = mx \\ y = ax \end{cases}$$

のなす角 θ に等しい．

すなわち 2 本の直線のなす角は傾きだけで決まる．



☆等しい余弦の角

$$\cos X = \cos Y$$

を満たすとき

$$X = \pm Y + 2k\pi \ \ (k \text{ は整数})$$

㊙例 $\cos X = \cos\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき

$X = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$（$k$ は整数）

☆等しい正弦の角

$$\sin X = \sin Y$$

を満たすとき

$$X = Y + 2k\pi \quad \text{または} \quad X = \pi - Y + 2k\pi \ \ (k \text{ は整数})$$

例 $\sin X = \sin\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき

$X = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ または $X = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$（$k$ は整数）

☆２倍角の三角関数を正接で表す

$\tan\theta = t$ とおくと

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{3}$ $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ （$t \fallingdotseq \pm 1$）

考 $\boxed{1}$
$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{1}\\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &= \frac{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} \quad (\because \text{分母, 分子を } \cos^2\theta \text{ で割った})\\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{\cos 2\theta}{1}\\ &= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &= \frac{1-\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} \quad (\because \text{分母, 分子を } \cos^2\theta \text{ で割った})\\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$
$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\\ &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (\because \boxed{1}, \boxed{2})\end{aligned}$$

別 $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{3}$ ２倍角の公式より $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\boxed{1}$ $\sin 2\theta = \cos 2\theta\cdot\tan 2\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

☆三角関数を半角の正接で表す

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと

$\boxed{1}$ $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{3}$ $\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ （$t \fallingdotseq \pm 1$）

考 $\boxed{\text{正接と倍角の関係}}$ で θ を $\dfrac{\theta}{2}$ にしているだけ．