数学Ⅱ　図形と方程式

座標平面／ 座標平面の象限／ 関数のグラフ／ 数直線の内分点／
座標平面の内分点／ 数直線の外分点／ 座標平面の外分点／
座標平面の三角形の重心／ 数直線の 2 点間の距離／ 座標平面の 2 点間の距離／
x 切片・y 切片／ 座標平面の直線の傾き／ 座標平面の直線の方程式／
座標平面の傾きと通る 1 点がわかる直線の方程式／
座標平面の通る 2 点がわかる直線の方程式／
☆座標平面の x 切片と y 切片がわかる直線の方程式／
★直線と法線ベクトル／
★座標平面の通る点と法線ベクトルがわかる直線の方程式／
★座標平面での直線の方程式と法線ベクトル／
座標平面における 2 直線の平行条件／ 座標平面における 2 直線の垂直条件／
直線に関する対称移動／ 座標平面における直線 $y = x$ に関する対称移動／
座標平面の点と直線の距離／ 座標平面の円の方程式／
円と直線の位置関係／ 中心が原点の円の接線の方程式／
★円の接線の方程式／ ★円の極線の方程式／ 2 つの円の位置関係／
★座標平面の 2 つの図形の共有点を通る図形の方程式（束の考え方）／
☆座標平面の 2 つの円の共有点を通る図形の方程式（束の考え方）／
☆座標平面の 2 つの円の 2 つの交点を通る直線（共通弦）の方程式／
軌跡／ 軌跡の証明／ 座標平面の軌跡の求め方／ 定角の軌跡／
アポロニウスの円／ 領域／ 境界線が $y = f(x)$ の領域／ 境界線が円の領域／
座標平面において条件が領域の最大・最小問題（線形計画法）／
★存在条件と通過領域（逆像法）／ ★ファクシミリの原理（順像法）／

□座標平面

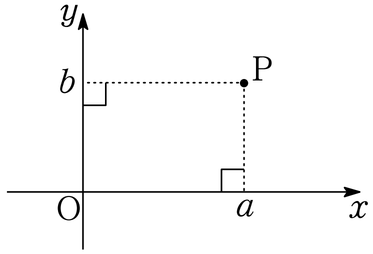
平面上に直交する 2 つの座標軸（ざひょうじく）を定めると

その平面上の点 P の位置は右の下の図のように 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される.

これを点 P の座標（ざひょう）といい $\mathrm{P}(a,\ b)$ とかく.

また 座標軸の交点を **原点**（げんてん） といい $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とかく.

座標軸の定められた平面を **座標平面**（ざひょうへいめん） という.



とくに何も条件がないとき，座標平面の座標軸は x 軸，y 軸として考える.

座標平面の象限

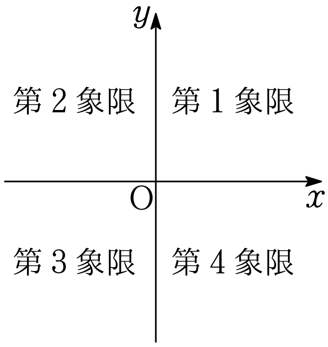
座標平面を座標軸により 4 つの部分に分けて，次のようにいう.

$\boxed{1}$ $\{(x,\ y) \mid x > 0$ かつ $y > 0\}$ を **第 1 象限**（しょうげん）

$\boxed{2}$ $\{(x,\ y) \mid x < 0$ かつ $y > 0\}$ を **第 2 象限**

$\boxed{3}$ $\{(x,\ y) \mid x < 0$ かつ $y < 0\}$ を **第 3 象限**

$\boxed{4}$ $\{(x,\ y) \mid x > 0$ かつ $y < 0\}$ を **第 4 象限**



ただし

$\{(x,\ y) \mid x = 0$ または $y = 0\}$ (座標軸) はどの象限にも含まれない.

㊟ $x > 0$，$y > 0$ の部分を第 1 象限といい，反時計回り（左回り）に第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限という.

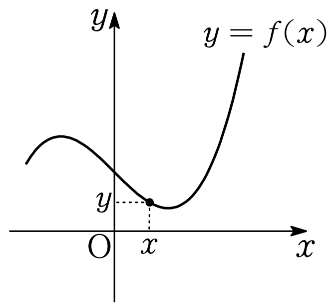
□関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ について

$\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ の点全体からなる図形を

座標平面に表したものを

関数 $y = f(x)$ の **グラフ** という.

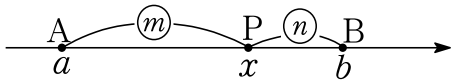


㊓ グラフは点の集まりというイメージを持っておきたい.
そうすると，軌跡などを理解しやすいと思われる.

数直線の内分点

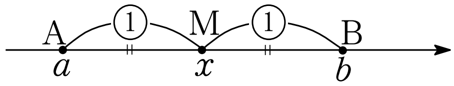
数直線上で点 A(a) と点 B(b) を結ぶ線分 AB を $m : n$ ($m > 0,\ n > 0$) に内分する点を P(x) とすると

$$x = \frac{na + mb}{m + n}$$



とくに 線分 AB を $1 : 1$ に内分する点，つまり線分 AB の中点を M(m) とすると

$$x = \frac{a + b}{2}$$



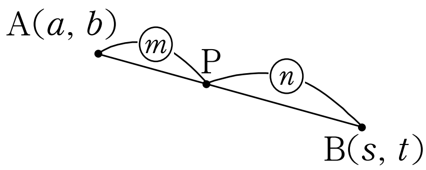
考 $a < b$ のとき $\mathrm{AP} = \dfrac{m}{m+n}\mathrm{AB} = \dfrac{(b-a)m}{m+n}$

$$x = a + \frac{(b-a)m}{m+n} = \frac{na+mb}{m+n}$$

座標平面の内分点

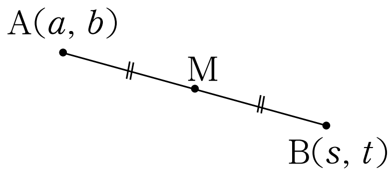
座標平面上の 2 点 A$(a,\ b)$，B$(s,\ t)$ に対し，線分 AB を $m : n$ ($m > 0,\ n > 0$) に内分する点を P とすると

$$\mathrm{P}\left(\frac{na + ms}{m + n},\ \frac{nb + mt}{m + n}\right)$$



とくに 線分 AB を $1 : 1$ に内分する点，つまり 線分 AB の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{a + s}{2},\ \frac{b + t}{2}\right)$$



考 x 座標，y 座標それぞれで $\boxed{\text{数直線の内分点}}$ を考える．

補 ベクトルで考えるとわかりやすい．

数直線の外分点

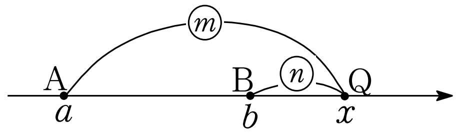
数直線上で点 A(a) と点 B(b) を結ぶ線分 AB を $m:n$（$m>0,\ n>0$）に外分する点を Q(x) とすると

$$x=\frac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$$

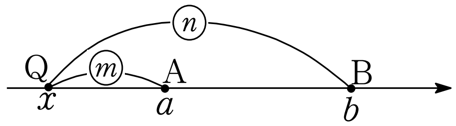
または

$$x=\frac{na+(-m)b}{(-m)+n}$$

〔$m>n$ のとき〕



〔$m<n$ のとき〕



補 $\boxed{\text{数直線の内分点}}$ で m を $-m$ または n を $-n$ に置き換えている.

考 $a<b$, $m>n$ のとき　$\mathrm{AQ}=\dfrac{m}{m-n}\mathrm{AB}=\dfrac{(b-a)m}{m-n}$

$$x=a+\frac{(b-a)m}{m-n}=\frac{-na+mb}{m-n}$$

座標平面の外分点

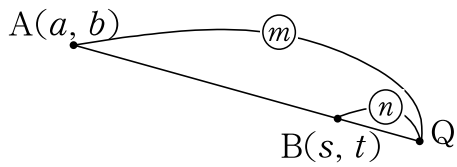
座標平面上の 2 点 A$(a,\ b)$, B$(s,\ t)$ に対し，線分 AB を $m:n$（$m>0,\ n>0$）に外分する点を Q とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{(-n)a+ms}{m+(-n)},\ \frac{(-n)b+mt}{m+(-n)}\right)$$

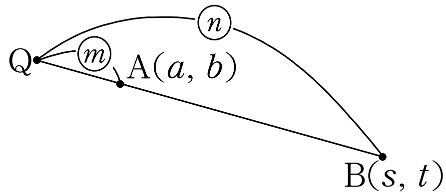
または

$$\mathrm{Q}\left(\frac{na+(-m)s}{(-m)+n},\ \frac{nb+(-m)t}{(-m)+n}\right)$$

〔$m>n$ のとき〕



〔$m<n$ のとき〕



考 x 座標，y 座標それぞれで $\boxed{\text{数直線の外分点}}$ を考える.

補 ベクトルで考えるとわかりやすい.

座標平面の三角形の重心

座標平面上で

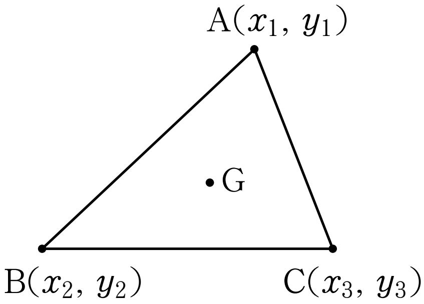
3点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点

とする △ABC の**重心**を G とすると

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

つまり

G(3頂点の x 座標の平均値, 3頂点の y 座標の平均値)



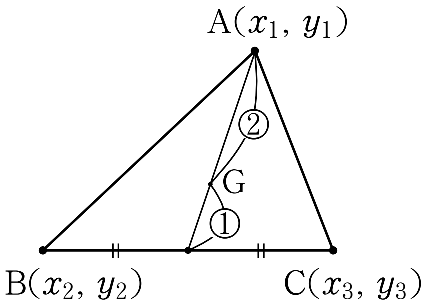
考 線分 BC の中点を M とすると

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

点 G は線分 AM を 2：1 に内分するので

$$G\left(\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

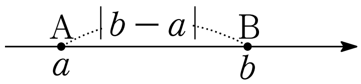
よって $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



□数直線の 2 点間の距離

数直線上で点 A(a) と点 B(b) の距離 AB は

$\mathrm{AB} = |b-a|$ または $\mathrm{AB} = |a-b|$



座標平面の 2 点間の距離

座標平面上で 2 点 A$(x_1,\ y_1)$ と点 B$(x_2,\ y_2)$ の距離 AB は

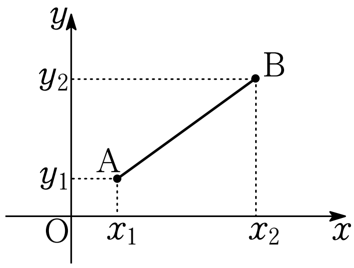
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

つまり

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x\,\text{座標の差})^2+(y\,\text{座標の差})^2}$$

とくに 2 点 O$(0,\ 0)$ と点 P$(p,\ q)$ の距離 OP は

$$\mathrm{OP} = \sqrt{p^2+q^2}$$



例 x 座標，y 座標それぞれで 数直線の 2 点間の距離 を考えて，三平方の定理を考える．

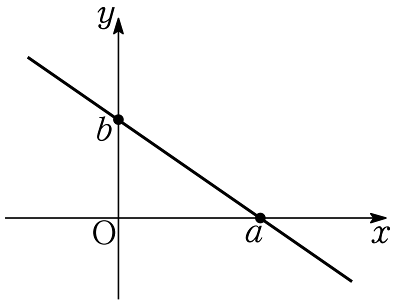
例 2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ の距離は
$\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{5}$

x 切片・y 切片

直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a,\ 0)$，点 $(0,\ b)$ で交わるとき

a をこの直線の x 切片（せっぺん）という．

b をこの直線の y 切片（せっぺん）という．



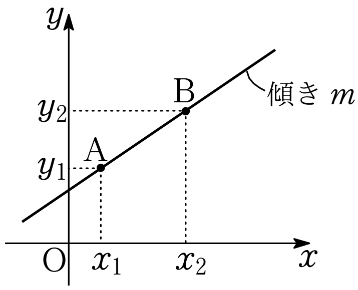
座標平面の直線の傾き

座標平面における直線の傾(かたむ)きは $\dfrac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}$

すなわち

2 点 A(x_1, y_1)，B(x_1, y_1) ($x_1 \neq x_2$) を通る直線の傾きを m とすると

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{または} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



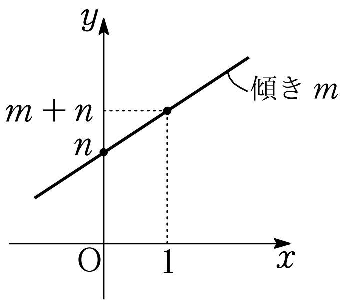
つまり　$(\text{傾き}) = \dfrac{(y\text{座標の差})}{(x\text{座標の差})}$

例 2 点 (1, 3)，(2, 5) を通る直線の傾きは $\dfrac{5-3}{2-1} = 2$

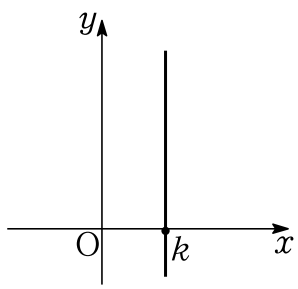
座標平面の直線の方程式

座標平面上の直線の方程式について

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{1}$ 傾きが m，y 切片が n の直線の方程式は

$$y = mx + n$$

$\boxed{2}$ y 軸に平行で，x 切片が k の直線の方程式は

$$x = k$$

直線の方程式の一般形は a，b，c を定数，$(a, b) \neq (0, 0)$ として

$$ax + by + c = 0$$

補 $ax + by + c = 0$ について

$\boxed{1}$ $b \neq 0$ ならば $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

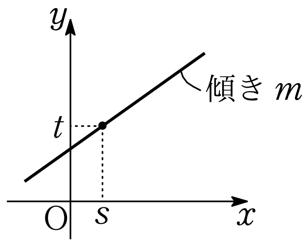
$\boxed{2}$ $b = 0$ ならば $x = -\dfrac{c}{a}$

座標平面の傾きと通る 1 点がわかる直線の方程式

座標平面で

傾きが m，点 $(s,\, t)$ を通る直線の方程式は

$$y = m(x - s) + t$$



㊫ $y - t = m(x - s)$ と表すこともできる．

㋕ x の係数を傾き m にして，$x = s$ とすると $y = t$ となるようにする．

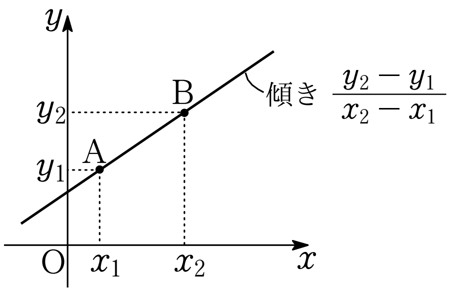
㋐ 傾き 2，点 $(1,\, 3)$ を通る直線の方程式は

$y = 2(x - 1) + 3$ すなわち $y = 2x + 1$

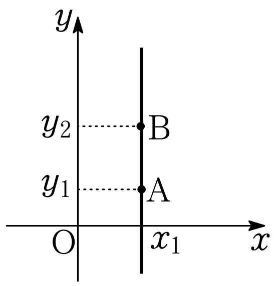
座標平面の通る 2 点がわかる直線の方程式

座標平面の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\, y_1)$，$\mathrm{B}(x_1,\, y_1)$ を通る直線を ℓ とすると

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{1}$ $x_1 \neq x_2$ のとき

$$\ell : y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$\boxed{2}$ $x_1 = x_2$ のとき

$$\ell : x = x_1$$

㋐ $\boxed{1}$ 2 点 $(1,\, 3)$，$(2,\, 5)$ を通る直線の方程式は，傾き $\dfrac{5 - 3}{2 - 1} = 2$ より

$y = 2(x - 1) + 3$ すなわち $y = 2x + 1$

$\boxed{2}$ 2 点 $(1,\, 1)$，$(1,\, 3)$ を通る直線の方程式は

$x = 1$

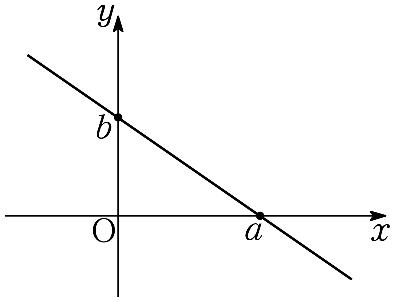
☆ x 切片と y 切片がわかる直線の方程式

$a \fallingdotseq 0$，$b \fallingdotseq 0$ のとき

x 切片が a，y 切片が b の直線

つまり

2 点 $(a, 0)$，$(0, b)$ を通る直線の方程式は



$\boxed{1}$ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

$\boxed{2}$ $y=-\dfrac{b}{a}x+b$

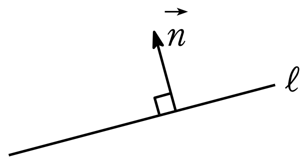
考 $\boxed{1}$ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ は 2 点 $(a, 0)$，$(0, b)$ を通り，2 点を通る直線は 1 本しかない．

$\boxed{2}$ 傾き $-\dfrac{b}{a}$，y 切片 b であることから立式できる．

★直線と法線ベクトル

右図の $\vec{n}$ のように，直線 ℓ と垂直な $\vec{0}$ でないベクトルを

直線 ℓ の **法線（ほうせん）ベクトル** という．



★座標平面の通る点と法線ベクトルがわかる直線の方程式

$(a,\ b) \fallingdotseq (0,\ 0)$ とする．

座標平面で

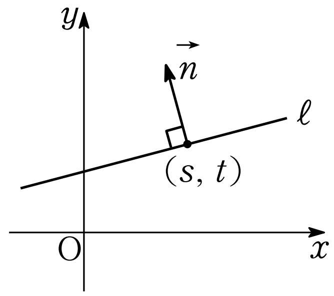
点 $(s,\ t)$ を通り，法線ベクトルの 1 つが $\vec{n}=(a,\ b)$

である直線の方程式は

$$a(x-s)+b(y-t)=0$$

すなわち

$$ax+by+c=0 \quad ただし \quad c=-as-bt$$



㊟考 点 $\mathrm{A}(s,\ t)$，直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-s,\ y-t)$

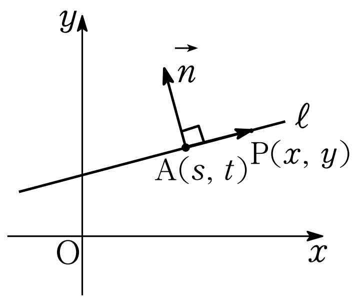
$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$　または　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$　であるから

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

これより　$a(x-s)+b(y-t)=0$

展開して　$ax+by-as-bt=0$

$c=-as-bt$　とおいて　$ax+by+c=0$



㊗例 $\vec{n}=(2,\ 3)$ に垂直で点 $(1,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$2(x-1)+3(y-4)=0$　すなわち　$2x+3y-14=0$

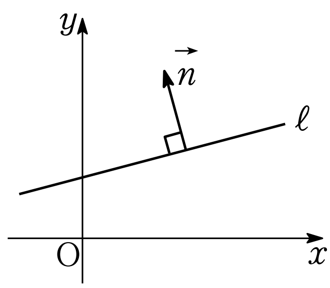
★座標平面での直線の方程式と法線ベクトル

$a,\ b,\ c$ は定数，$(a,\ b) \fallingdotseq (0,\ 0)$ とする．

座標平面で直線 ℓ の方程式が

$$\ell : ax+by+c=0$$

ならば $\vec{n}=(a,\ b)$ は ℓ の法線ベクトルの 1 つ．

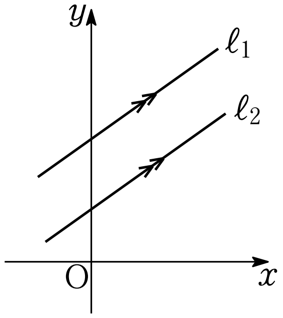


㊗例 直線 $2x+3y-14=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると，その 1 つに $\vec{n}=(2,\ 3)$ がある．

座標平面における2直線の平行条件

座標平面にある2本の直線 ℓ_1，ℓ_2 が平行（へいこう）なとき，次が成り立つ．

ただし，2本の直線が一致する場合も平行とする．



1 $\begin{cases} \ell_1 : y = mx + n \\ \ell_2 : y = px + q \end{cases}$

ならば

$$m = p$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の傾きが等しい

2 $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $(s, t) \neq (0, 0)$ とする．

$$\begin{cases} \ell_1 : ax + by + c = 0 \\ \ell_2 : sx + ty + u = 0 \end{cases}$$

ならば

$$a : b = s : t \iff at - bs = 0$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の x と y の係数の比が等しい

考 2 ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1} = (a, b)$，$\overrightarrow{n_2} = (s, t)$ とすると $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$

例 1 $\begin{cases} \ell_1 : y = 2x + 1 \\ \ell_2 : y = 2x + 3 \end{cases}$

ℓ_1 と ℓ_2 は傾きがともに2であるから $\ell_1 \parallel \ell_2$.

2 $\begin{cases} \ell_1 : 2x - y + 1 = 0 \\ \ell_2 : 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

ℓ_1 と ℓ_2 は x と y の係数の比がともに $2 : (-1)$ であるから $\ell_1 \parallel \ell_2$

座標平面における2直線の垂直条件

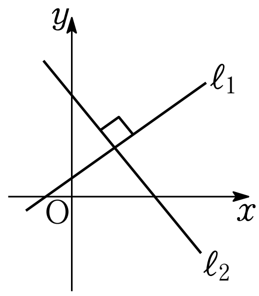
座標平面にある2本の直線 ℓ_1，ℓ_2 が垂直（すいちょく）であるとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \ell_1 : y = mx + n \\ \ell_2 : y = px + q \end{cases}$

ならば

$$mp = -1$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の傾きの積が -1



$\boxed{2}$ $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $(s, t) \neq (0, 0)$ とする．

$\begin{cases} \ell_1 : ax + by + c = 0 \\ \ell_2 : sx + ty + u = 0 \end{cases}$

ならば

$$as + bt = 0$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の x と y の係数の積の和が 0

㊔ $\boxed{2}$ ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1} = (a, b)$，$\overrightarrow{n_2} = (s, t)$ とすると $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

㊙ $\boxed{1}$ $\begin{cases} \ell_1 : y = 2x + 1 \\ \ell_2 : y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

ℓ_1 と ℓ_2 は傾きの積は $2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ であるから $\ell_1 \perp \ell_2$

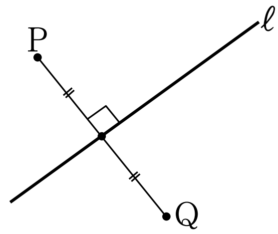
$\boxed{2}$ $\begin{cases} \ell_1 : 2x - y + 1 = 0 \\ \ell_2 : x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

ℓ_1 と ℓ_2 の x と y の係数の積の和は $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$ であるから $\ell_1 \perp \ell_2$

直線に関する対称点

2 点 P と Q が直線 ℓ に関して対称になるとき

次の 2 つが成り立つ.

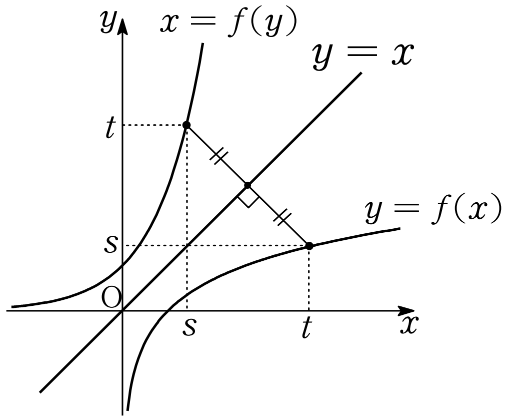


$\boxed{1}$ 線分 PQ の中点が ℓ 上にある.

$\boxed{2}$ $\ell \perp \mathrm{PQ}$

座標平面における直線 $y=x$ に関する対称移動

座標平面において



$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

直線 $y=x$ に関して対称移動すると

点 $(t,\ s)$

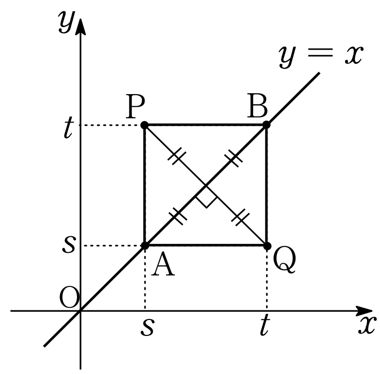
$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を

直線 $y=x$ に関して対称移動すると

$x=f(y)$

つまり x 座標と y 座標を入れかえた 2 点は直線 $y=x$ に関して対称

考 $\boxed{1}$ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を直線 $y=x$ に関して対称移動した点を Q とする.



点 P が $y=x$ 上にあるときは $t=s$ なので $\mathrm{Q}(t,\ s)$

点 P が $y=x$ 上にないとき

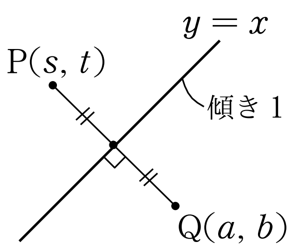
点 P を通り軸に垂直な 2 直線 $x=s$, $y=t$ と直線 $y=x$ の

それぞれの交点を $\mathrm{A}(s,\ s)$, $\mathrm{B}(t,\ t)$ とすると

右の図のようになる.

四角形 PAQB は正方形なので $\mathrm{Q}(t,\ s)$

別 上と同じ設定で, 点 P が $y=x$ 上にないとき $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とすると



線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{s+a}{2},\ \dfrac{t+b}{2}\right)$ が $y=x$ 上にあるので

$\dfrac{t+b}{2}=\dfrac{s+a}{2}$ すなわち $a-b=t-s$ ……①

直線 PQ と $y=x$ は直交するので, 傾きの積が -1 より

$\dfrac{t-b}{s-a}\cdot 1=-1$ すなわち $a+b=t+s$ ……②

①, ② を連立して $a=t,\ b=s$

よって $\mathrm{Q}(t,\ s)$

例 $\boxed{1}$ 点 $(2,\ 1)$ を直線 $y=x$ に関して対称移動すると $(1,\ 2)$

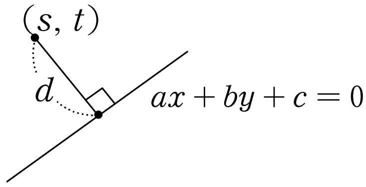
例 $\boxed{1}$ $y=10^x$ を直線 $y=x$ に関して対称移動すると $x=10^y$ すなわち $y=\log_{10} x$

座標平面の点と直線の距離

座標平面で

点 $(s,\ t)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



㊓ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から直線 $ax+by+c=0$ へ垂線 PH を下ろして $\mathrm{PH}=d$

㊔ $ax+by+c=0$ ……①

① は直線なので $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ として，点 P を通り ① に直交する直線を ℓ とし，ℓ と ① の交点を H とする.

$\ell: b(x-s)-a(y-t)=0$ ……②

① は $a(x-s)+b(y-t)=-(as+bt+c)$ ……①′

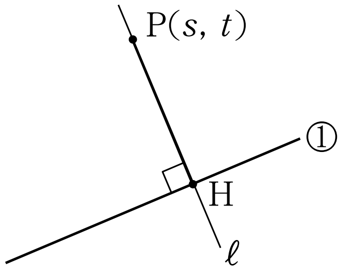
①′, ② を連立して

$$x-s=-\frac{a(as+bt+c)}{a^2+b^2}$$

$$y-t=-\frac{b(as+bt+c)}{a^2+b^2}$$

これらを満たす x, y が $\mathrm{H}(x,\ y)$ となるので

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}^2&=(x-s)^2+(y-t)^2\\&=\frac{(a^2+b^2)(as+bt+c)^2}{(a^2+b^2)^2}\\&=\frac{(as+bt+c)^2}{a^2+b^2}\end{aligned}$$



よって，点 P と ① の距離は $\mathrm{PH}=\dfrac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

㊑ 点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x+4y+5=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

座標平面の円の方程式

座標平面の円について

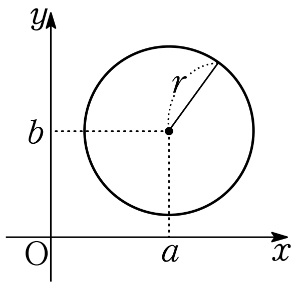
中心が $(a,\ b)$ 半径が r $(r>0)$ の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

円の方程式の一般形は l，m，n を定数として

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

ただし，円になる条件は $l^2+m^2-4n>0$



補 $x^2+y^2+lx+my+n=0 \iff \left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{m}{2}\right)^2=\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}$

$l^2+m^2-4n>0$ ならば 中心 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$，半径 $\sqrt{\dfrac{l^2+m^2-4n}{2}}$ の円を表す．

例 中心が点 $(1,\ 2)$，半径が 3 の円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

変形して

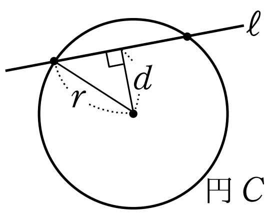
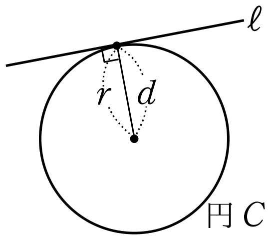
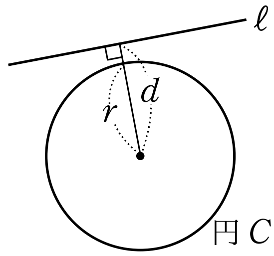
$$x^2+y^2-2x-4y-4=0$$

□円と直線の位置関係

平面上に円 C と直線 ℓ がある.

円 C の中心と直線 ℓ の距離を d, 円 C の半径を r として,

円 C と直線 ℓ の位置関係は次のようになる.

d と r	$d < r$	$d = r$	$d > r$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
グラフ			

中心が原点の円の接線の方程式

座標平面において

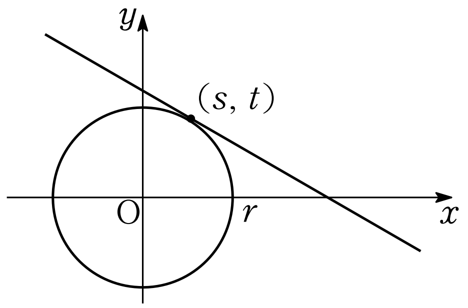
円：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(s,\ t)$

における接線の方程式は

$$s^2+t^2=r^2$$

のもとで

$$sx+ty=r^2$$



補 円の方程式で x^2 を sx，y^2 を ty とすると接線の方程式になる．

考 接点を $\mathrm{T}(s,\ t)$ とおくと，円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあるので

$s^2+t^2=r^2$ ……①

接線を ℓ として

あ $t=0$ のとき

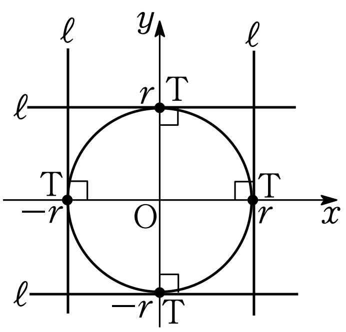
$(s,\ t)=(-r,\ 0)$ ならば

ℓ の方程式は $x=-r$ すなわち $-r\cdot x+0\cdot y=r^2$

$(s,\ t)=(r,\ 0)$ ならば

ℓ の方程式は $x=r$ すなわち $r\cdot x+0\cdot y=r^2$

つまり $\ell：sx+ty=r^2$



い $s=0$ のとき

$(s,\ t)=(0,\ -r)$ ならば

ℓ の方程式は $y=-r$ すなわち $0\cdot x+(-r)\cdot y=r^2$

$(s,\ t)=(0,\ r)$ ならば

ℓ の方程式は $\ell：y=r$ すなわち $0\cdot x+r\cdot y=r^2$

つまり $\ell：sx+ty=r^2$

う $s\neq 0$ かつ $t\neq 0$ のとき

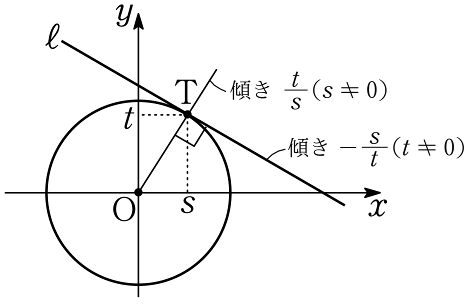
直線 OT の傾きは $\dfrac{t}{s}$

$\mathrm{OT}\perp\ell$ より傾きの積が -1 を考えて ℓ の傾きは $-\dfrac{s}{t}$

ℓ の方程式は $y=-\dfrac{s}{t}(x-s)+t$

両辺 t をかけて整理すると $sx+ty=s^2+t^2$

① を代入して $sx+ty=r^2$



補 示し方はベクトルの内積，法線ベクトル，微分，2 次方程式の重解をもつ条件などある．

例 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における円の接線の方程式は

$$3x+4y=25$$

★円の接線の方程式

座標平面において

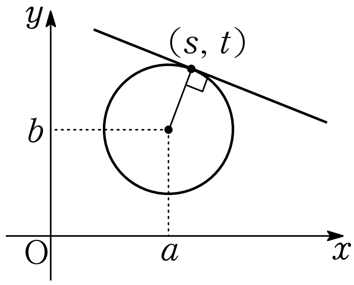
円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(s,\ t)$

における接線の方程式は

$$(s-a)^2+(t-b)^2=r^2$$

のもとで

$$(s-a)(x-a)+(t-b)(y-b)=r^2$$



考 円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とその円上の点 $(s,\ t)$ における接線を
x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $-b$ だけ平行移動して
円：$x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(s-a,\ t-b)$ における接線になるから，
$\boxed{\text{中心が原点の円の接線の方程式}}$から方程式は
$(s-a)^2+(t-b)^2=r^2$ のもとで $(s-a)x+(t-b)y=r^2$
これを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動して

$$(s-a)(x-a)+(t-b)(y-b)=r^2$$

補 $a=0$，$b=0$ とすると$\boxed{\text{中心が原点の円の接線の方程式}}$になる．

例 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $(4,\ 6)$ における円の接線の方程式は

$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$ すなわち $3x+4y=36$

★円の極線の方程式

座標平面において

円：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ の外部にある点 $\mathrm{P}(s,\,t)$ から円へ 2 本の接線を引き，

それらの接点をそれぞれ A，B する．

このとき

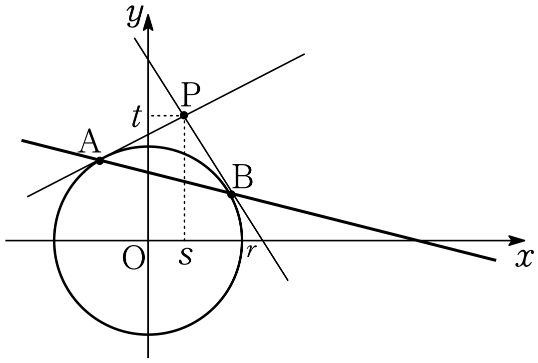
点 P を極（きょく），直線 AB を極線（きょくせん）という．

直線 AB の方程式は

$$s^2+t^2>r^2$$

のもとで

$$sx+ty=r^2$$



㊓ 点 $\mathrm{P}(s,\,t)$ が円上にあるとすると，直線 AB は円の接線になる．

㊔ $x^2+y^2=r^2$ ……①

とおく．

① 上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\,y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\,y_2)$ における接線をそれぞれ ℓ_{A}，ℓ_{B} とすると

$\ell_{\mathrm{A}}:x_1x+y_1y=r^2$

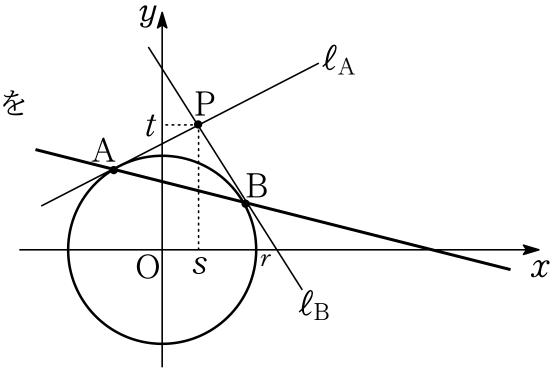
$\ell_{\mathrm{B}}:x_2x+y_2y=r^2$

これらが $\mathrm{P}(s,\,t)$ を通るとして

$$\begin{cases} sx_1+ty_1=r^2 \\ sx_2+ty_2=r^2 \end{cases}$$

これは 2 点 A，B が直線 $sx+ty=r^2$ を通ることを表すので

$\mathrm{AB}:sx+ty=r^2$



㊐ 円 $x^2+y^2=25$ に点 $(2,\,7)$ から 2 本の接線を引き，2 つの接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式は

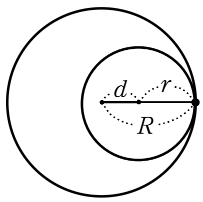
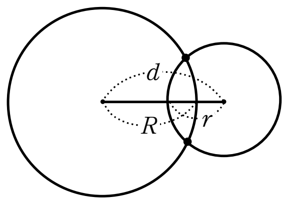
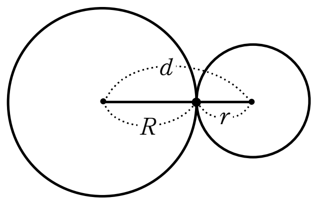
$2x+7y=25$

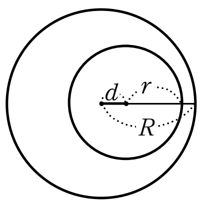
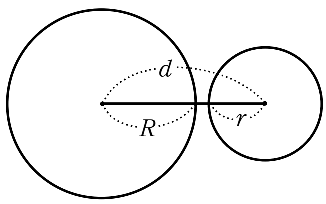
□ 2 つの円の位置関係

平面上に 2 つの円がある.

中心間の距離を d, 半径をそれぞれ R, r $(R > r)$ として

2 つの円の位置関係は次のようになる.

d と R, r	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$
2 つの円の位置関係	内接する（共有点 1 個）	異なる 2 点で交わる（共有点 2 個）	外接する（共有点 1 個）
グラフ			

d と R, r	$d < R - r$	$d > R + r$
2 つの円の位置関係	内包する（共有点 0 個）	共有点をもたない（共有点 0 個）
グラフ		

$R = r$ のときも成り立つが「内接する」ことや「内包する」ことはない.

2 つの円が共有点をもつ条件は $R - r \leqq d \leqq R + r$

㊓ 2 つの円の位置関係は中心間の距離と 2 つの円の半径で決まる.

㊓ 2 つの円が接するとき，接点は 2 つの円の中心を結ぶ直線上にある.

★座標平面の 2 つの図形の共有点を通る図形の方程式（束の考え方）

座標平面において

共有点をもつ 2 つの図形 $\begin{cases} f(x,\, y) = 0 \\ g(x,\, y) = 0 \end{cases}$

の任意の共有点を通る図形の方程式は

$$f(x,\, y) + k\,g(x,\, y) = 0 \ (k \text{ は実数}) \quad \text{または} \quad g(x,\, y) = 0$$

㊔ 2 つの図形 $\begin{cases} f(x,\, y) = 0 \\ g(x,\, y) = 0 \end{cases}$

の共有点を点 $(\alpha,\, \beta)$ とすると

$$\begin{cases} f(\alpha,\, \beta) = 0 \\ g(\alpha,\, \beta) = 0 \end{cases}$$

を満たす．

ここで，任意の実数 s，t に対して

$$s\,f(\alpha,\, \beta) + t\,g(\alpha,\, \beta) = 0$$

が成り立つ．

すなわち

$$s\,f(x,\, y) + t\,g(x,\, y) = 0 \quad \cdots\cdots ⊛$$

は共有点 $(\alpha,\, \beta)$ を通る図形の方程式である．

(あ) $s \fallingdotseq 0$ のとき，⊛ の両辺を s でわって

$$f(x,\, y) + \frac{t}{s} g(x,\, y) = 0$$

$\dfrac{t}{s} = k$ とおいて $\boldsymbol{f(x,\, y) + k\,g(x,\, y) = 0}$

(い) $s = 0$ のとき，⊛ は $tg(x,\, y) = 0$

これは $\boldsymbol{g(x,\, y) = 0}$ が共有点を通る図形の方程式であることを表す．

なお，(あ) で $k = 0$ とすると $f(x,\, y) = 0$ となる．

㊟ 共有点を通る図形は様々で，すべてを表すわけではない．

☆座標平面の 2 つの図形の共有点を通る図形の方程式（束の考え方）

座標平面で異なる 2 点で交わる 2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2+lx+my+n=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の任意の共有点を通る ①，② 以外の図形の方程式は

k を 0 以外の実数とし，① + ② × k として

$$x^2+y^2+lx+my+n+k(x^2+y^2+ax+by+c)=0$$

これは

$k \neq -1$ ならば 円 を表す．

$k=-1$ ならば 直線 を表す．

㊟補 ①，② は共有点を通るのは自明である．

補 ① × k + ② でもよい．

補 交点を直接求めなくても，共有点を通る図形の方程式が立式できる．

補 ①，② を x，y の連立方程式とみて，解が共有点になるが，式変形しても解は変わらない．

注 円と直線のみを表せて，それ以外の図形は表せていない．

例 異なる 2 点で交わる 2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2-4x-2y+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

について，① + ② として

$$2x^2+2y^2-4x-2y-1=0$$

両辺を 2 でわって

$$x^2+y^2-2x-y-\frac{1}{2}=0$$

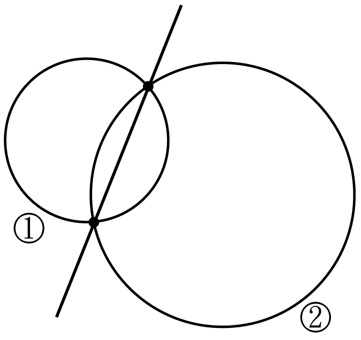
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

この円は ①，② の 2 つの交点を通る円のひとつである．

☆座標平面の 2 つの円の 2 つの交点を通る直線 (共通弦) の方程式

座標平面で異なる 2 点で交わる 2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2+lx+my+n=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$



の 2 つの交点を通る直線 (共通弦) の方程式は

①－② として

$$(l-a)x+(m-b)y+n-c=0$$

つまり ① と ② を連立して x^2，y^2 を消去すると共通弦の方程式になる.

(考) 座標平面の 2 つの図形の共有点を通る図形の方程式 (束の考え方) の $k=-1$ の場合

(例) 異なる 2 点で交わる 2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2-4x-2y+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の 2 つの交点を通る直線の方程式は，①－② として $4x+2y-5=0$

軌跡

与えられた条件を満たす点全体の図形を，その条件を満たす点の **軌跡**(きせき) という.

軌跡の証明

与えられた条件を満たす点の軌跡が図形 F であることを証明するには，
次の 2 つを示せばよい.

$\boxed{1}$ 与えられた条件を満たす点は 図形 F 上にある.

$\boxed{2}$ 逆に，図形 F 上のすべての点は 与えられた条件を満たす.

$\boxed{2}$ に関しては，明らかな場合は 証明を省略してもよい.

座標平面の軌跡の求め方

座標平面における軌跡の求め方には，次の手順で求める方法がある.

$\boxed{1}$ 求める軌跡の点を (X, Y) とおく.

$\boxed{2}$ 条件より X と Y の関係式を作る.（これが軌跡の満たす方程式になる）

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ のときの点 (X, Y) が条件を満たすことを確認する.

$\boxed{3}$ に関しては，$\boxed{2}$ で同値変形できているなど明らかなときは省略してもよい.

以上から作られた X と Y の集合が求める軌跡である.

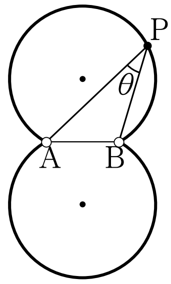
補 点 (X, Y) とおくと説明したが，おく文字は何でもよい.
つまり，点 (x, y) や点 (a, b) とおいても求める軌跡は同じになる.
例えば $\{(X, Y) \mid Y = X^2\} = \{(x, y) \mid y = x^2\} = \{(a, b) \mid b = a^2\}$
文字は違うが同じ集合なので同じ図形となる.

定角の軌跡

平面上に異なる 2 定点 A，B がある．

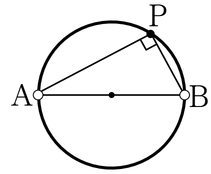
この平面上で $\angle APB = \theta$ (θ は一定) を満たす点 P の軌跡は

右上図のような弦 AB の円の一部



とくに $\angle APB = 90°$ のときの点 P の軌跡は

右下図のような直径 AB の円の 2 点 A，B を除く部分



考 同じ弧に対する円周角は等しいことを考える．

補 「平面上」が「空間内」になると「円」が「球」になる．

アポロニウスの円

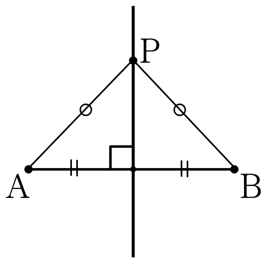
平面上に異なる 2 定点 A，B がある．

この平面上で AP : BP $= m : n$ ($m > 0$，$n > 0$) を満たす点 P の軌跡は

次のようになる．

$\boxed{1}$ $m = n$ のとき

線分 AB の垂直二等分線

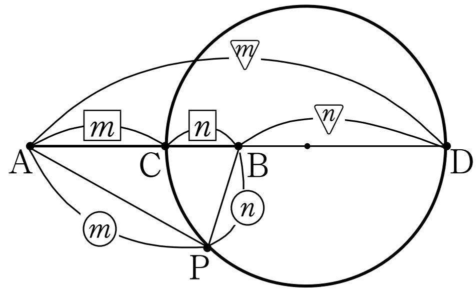


$\boxed{2}$ $m \neq n$ のとき

線分 AB を $m : n$ に内分する点を C

線分 AB を $m : n$ に外分する点を D

として 線分 CD を直径とする円



補 $\boxed{1}$ $m = n$ のとき，AP : BP $= 1 : 1$ なので AP $=$ BP

要

軌跡を求めるときは

図形的に求める，座標平面で方程式を作る，などの方法がある．

領域

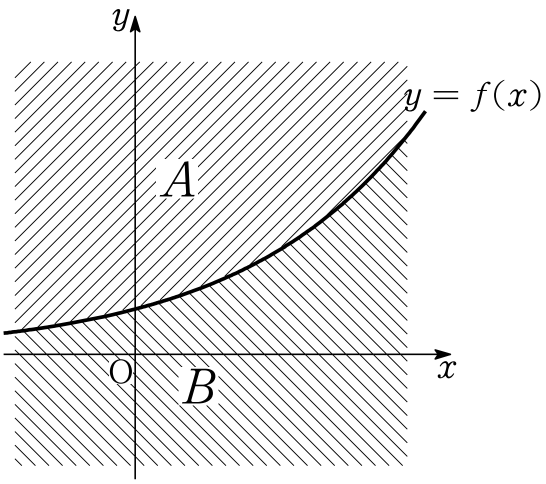
x, y についての不等式があるとき，それを満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合をその不等式の表す 領域(りょういき) という．
とくに 領域を分ける線を 境界線(きょうかいせん) または 境界(きょうかい) という．

境界線が $y=f(x)$ の領域

座標平面に $y=f(x)$ がある．

1 $A=\{(x,\ y) \mid y>f(x)\}$
の表す領域は $y=f(x)$ の上側

2 $B=\{(x,\ y) \mid y<f(x)\}$
の表す領域は $y=f(x)$ の下側

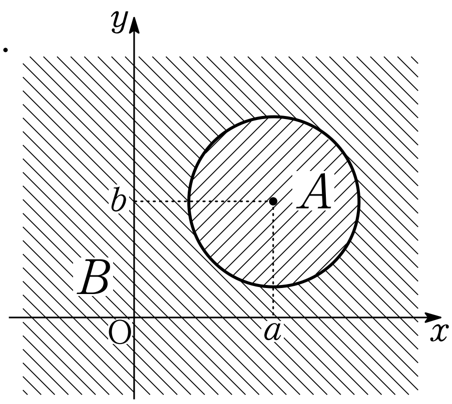


境界線が円の領域

座標平面に円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ がある．

1 $A=\{(x,\ y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$
の表す領域は円の内側

2 $B=\{(x,\ y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2>r^2\}$
の表す領域は円の外側



座標平面において条件が領域の最大・最小問題（線形計画法）

領域 D を満たす $(x,\ y)$ に対して $F(x,\ y)$ の最大値．最小値を求める問題は次の手順で求める方法がある．

$\boxed{1}$ 条件の領域 D を図示する．

$\boxed{2}$ $F(x,\ y)=k$ として，これが条件の領域 D と共有点をもって，
k が最大，最小となる点を考える．（共有点の $x,\ y$ に対して実数 k が存在する）

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ のときの点における k が最大値，最小値となる．

㋫

$$D:\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x+4 \\ y \leqq 2x+4 \\ y \geqq \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$
を満たす $(x,\ y)$ に対して，$x+y$ の最大値と最小値を求める．

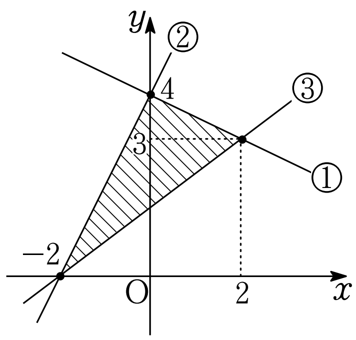
$\boxed{1}$ D の境界線は

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+4 & \cdots\cdots① \\ y=2x+4 & \cdots\cdots② \\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①，② の交点は $(0,\ 4)$，①，③ の交点は $(2,\ 3)$

②，③ の交点は $(-2,\ 0)$

D を図示すると右図斜線部（境界線を含む）



$\boxed{2}$ $x+y=k$ ……④

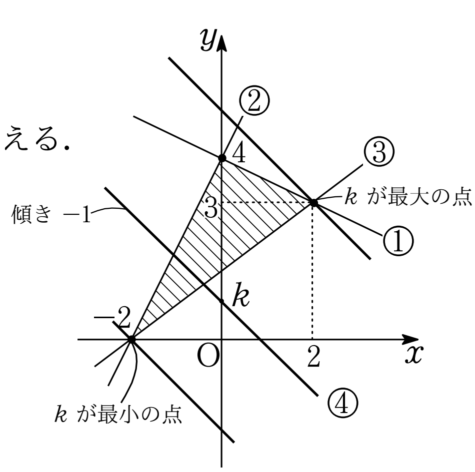
すなわち $y=-x+k$ とする．

④ は傾き -1，y 切片 k の直線である．

これが D と共有点をもち，k が最大，最小になる点を考える．

$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき k は最大で $k=5$

$(x,\ y)=(-2,\ 0)$ のとき k は最小で $k=-2$

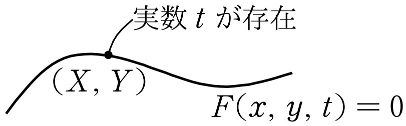


$\boxed{3}$ よって $\begin{cases} \textbf{最大値 } \boldsymbol{5} & \boldsymbol{(x=2,\ y=3)} \\ \textbf{最小値 } \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{(x=-2,\ y=0)} \end{cases}$

★存在条件と通過領域（逆像法）

座標平面で媒介変数を t とする図形 $F(x,\,y,\,t)=0$ が

通過する点を $(X,\,Y)$ とすると　$F(X,\,Y,\,t)=0$



このとき

　実数 t が存在する $\iff$ 点 $(X,\,Y)$ が存在する

　実数 t が存在しない $\iff$ 点 $(X,\,Y)$ が存在しない

すなわち　$F(x,\,y,\,t)=0$　が通過する領域は

$F(X,\,Y,\,t)=0$ を満たす実数 t が存在する点 $(X,\,Y)$ の集合である．

補 逆手流ともいう．

例

実数 t に対して座標平面の直線 $\ell_t : y=2tx-t^2$ を考える．
t が実数全体を動くとき，直線 ℓ_t が通過する領域を図示する．

ℓ_t が通過する点を $(X,\,Y)$ とすると

$$Y=2tX-t^2 \quad \text{すなわち} \quad t^2-2Xt+Y=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

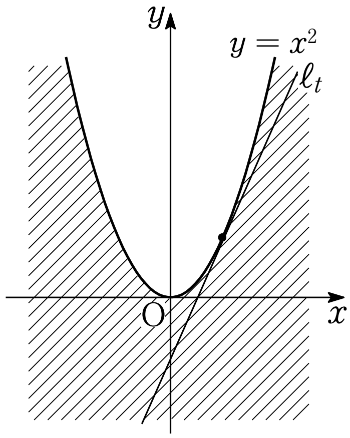
これを満たす実数 t が存在する条件を考える．

$(*)$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=X^2-Y \geqq 0 \qquad \therefore Y \leqq X^2$$

よって，ℓ_t が通過する領域は $y \leqq x^2$

図示すると右図斜線部（境界線含む）．



補 ℓ_t が $(X,\,Y)=(1,\,0)$ を通過する点かを調べると

$(*)$ より $t^2-2\cdot1\cdot t+0=0$　すなわち　$t(t-2)=0$

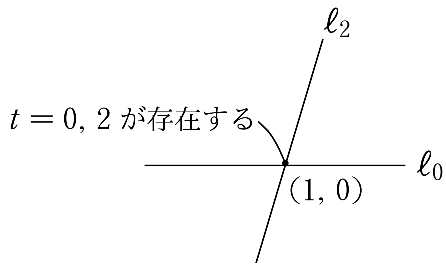
$t=0,\,2$ の実数 t が存在するから通過する点とわかる．

$\ell_0 : y=0$，$\ell_2 : y=4x-4$ が通過することもわかる．

また，ℓ_t が $(X,\,Y)=(1,\,2)$ が通過する点かを調べると

$(*)$ より $t^2-2\cdot1\cdot t+2=0$　すなわち　$t^2-2t+2=0$

実数 t が存在しないから通過しない点とわかる．



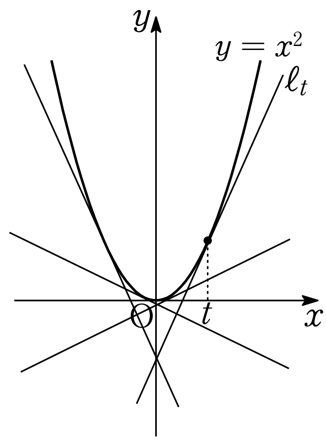
補 $\begin{cases} \ell_t : y=2tx-t^2 \\ y=x^2 \end{cases}$ を連立すると $(x-t)^2=0$

つまり ℓ_t は $y=x^2$ に $x=t$ で接していることがわかる．

ℓ_t は $y=x^2$ 上の点 $(t,\,t^2)$ における接線であり，

接点を動かして接線を引いていくと通過領域が決まる．

ℓ_t が接しながら通過する曲線 $y=x^2$ を 包絡線（ほうらくせん） という．



補 Geogebra で $y=2tx-t^2$ の通過領域を作成してみました．

Geogebra で通過領域をみる

★ファクシミリの原理（順像法）

座標平面で媒介変数を t とする図形 $y=f(x,\,t)$ が通過する領域は

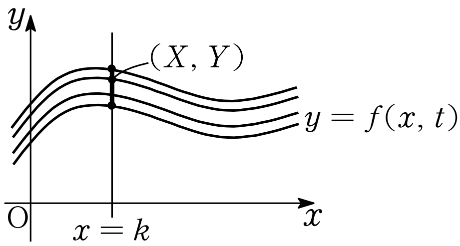
次の手順で求めることができる．

$\boxed{1}$ 通過する点を $(X,\,Y)$ として $Y=f(X,\,t)$ を満たすことから

$X=k$ と X の値を固定し，

Y を t の関数 $Y=g(t)=f(k,\,t)$ とみて，

Y のとりうる値の範囲を調べる．



$\boxed{2}$ 固定した X を動かして，通過領域を決定する．

補 順手流ともいう．

話 慣れてくると文字で置かずにできる．

考 x の値ごとに図形が通過する範囲を考えてる．

FAX(ファックス)のように紙にインクをつけていくイメージ．（時代遅れのネーミング）

例

実数 t に対して座標平面の直線 $\ell_t : y=2tx-t^2$ を考える．
t が実数全体を動くとき，直線 ℓ_t が通過する領域を図示する．

$\boxed{1}$ ℓ_t が通過する点を $(X,\,Y)$ とすると

$$Y=2tX-t^2$$

$X=k$ と固定すると

$$Y=2tk-t^2=-t^2+2kt=-(t-k)^2+k^2$$

これを t の関数とみて，実数 t を動かすと $Y \leqq k^2$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} X=k \\ Y \leqq k^2 \end{cases}$ であるから $Y \leqq X^2$

よって，ℓ_t が通過する領域は $y \leqq x^2$

図示すると下図縦線部（境界線含む）．