数学Ⅱ　式と証明

立方式の展開／ 二項定理／ パスカルの三角形／
パスカルの三角形（二項係数）／ 二項係数の和／ 3 つの項の和の平方式の展開／ ☆多項（三項）定理／ ★多項定理／ 立方の和または差になる展開／
立方式への因数分解／ 立方の和または差の因数分解／
☆n 乗の差の因数分解／ ★n 乗の和の因数分解／ ☆3 次の因数分解公式／
整式（多項式）／ 整式の四則計算／ ★整式の次数／ 分数式／
分数式の約分／ 既約分数式／ 通分／ 分数式の四則計算／ 恒等式／
1 次式以下の恒等式／ 2 次式以下の恒等式／ 整式の恒等式／ 整式の割り算／
剰余の定理／ 因数定理／ 等式の証明／ 実数の平方の性質／
負でない数の平方の大小関係／ 相加平均と相乗平均／
相加平均と相乗平均の大小関係／ ★実数の三角不等式／
★2 次のコーシー・シュワルツの不等式／
★3 次のコーシー・シュワルツの不等式／
★n 次のコーシー・シュワルツの不等式

立方式の展開

$\boxed{1}$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

㊂ $\boxed{1}$ $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$
$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3 = \{a+(-b)\}^3$
$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$ （$\because$ $\boxed{1}$）
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

㊄ $\boxed{1}$ $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$\boxed{2}$ $(x-2)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を展開せよ.

(1) $(x+1)^3$

(2) $(x-2y)^3$

㊆

(1) $(x+1)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 + 1^3 = \boldsymbol{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

(2) $(x-2y)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot (2y)^2 - (2y)^3 = \boldsymbol{x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3}$

二項定理

n を自然数とする．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$$

とくに

$\boxed{1}$ ${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k$ を $(a+b)^n$ の展開式の 一般項（いっぱんこう） という．

$\boxed{2}$ ${}_n\mathrm{C}_k$ を 二項係数（にこうけいすう） という．

補 $a^0=1$，$b^0=1$ とする．

例 $(a+b)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 a^3 + {}_3\mathrm{C}_1 a^2b + {}_3\mathrm{C}_2 ab^2 + {}_3\mathrm{C}_3 b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

このことを説明すると次になる．

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

展開すると 3 つの $(a+b)$ からそれぞれ a または b を取り出して積にすることから

□ を a または b として

□ × □ × □ ＝(1 つの項)

$a \times a \times a = a^3$

$a \times a \times b = a^2b$

$a \times b \times a = a^2b$

$b \times a \times a = a^2b$

$a \times b \times b = ab^2$

$b \times a \times b = ab^2$

$b \times b \times a = ab^2$

$b \times b \times b = b^3$

すなわち

$$(a+b)^3 = \underbrace{{}_3\mathrm{C}_0}_{aaa\text{ の並べ方}} a^3 + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_1}_{aab\text{ の並べ方}} a^2b + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_2}_{abb\text{ の並べ方}} ab^2 + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_3}_{bbb\text{ の並べ方}} b^3$$

考 $(a+b)^n$ の $a^{n-k}b^k$ の係数は

□ を a または b として

□ × □ × □ × ⋯ × □ ＝(1 つの項)

であることから $\underbrace{aa\cdots a}_{(n-k)\text{ 個}}\ \underbrace{bb\cdots b}_{k\text{ 個}}$ の並べ方 ${}_n\mathrm{C}_k$（通り）

パスカルの三角形

$(a+b)^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の展開式の係数を次々と求め，
下のように並べたものをパスカルの三角形という．

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

補 $(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

$(a+b)^8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$

$(a+b)^9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^6+9ab^8+b^9$

パスカルの三角形（二項係数）

$(a+b)^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の展開式の二項係数を次々と求め，
下のように並べたものをパスカルの三角形という．

$$
\begin{array}{c}
{}_0\mathrm{C}_0 \\
{}_1\mathrm{C}_0 \quad {}_1\mathrm{C}_1 \\
{}_2\mathrm{C}_0 \quad {}_2\mathrm{C}_1 \quad {}_2\mathrm{C}_2 \\
{}_3\mathrm{C}_0 \quad {}_3\mathrm{C}_1 \quad {}_3\mathrm{C}_2 \quad {}_3\mathrm{C}_3 \\
{}_4\mathrm{C}_0 \quad {}_4\mathrm{C}_1 \quad {}_4\mathrm{C}_2 \quad {}_4\mathrm{C}_3 \quad {}_4\mathrm{C}_4 \\
{}_5\mathrm{C}_0 \quad {}_5\mathrm{C}_1 \quad {}_5\mathrm{C}_2 \quad {}_5\mathrm{C}_3 \quad {}_5\mathrm{C}_4 \quad {}_5\mathrm{C}_5 \\
{}_6\mathrm{C}_0 \quad {}_6\mathrm{C}_1 \quad {}_6\mathrm{C}_2 \quad {}_6\mathrm{C}_3 \quad {}_6\mathrm{C}_4 \quad {}_6\mathrm{C}_5 \quad {}_6\mathrm{C}_6 \\
{}_7\mathrm{C}_0 \quad {}_7\mathrm{C}_1 \quad {}_7\mathrm{C}_2 \quad {}_7\mathrm{C}_3 \quad {}_7\mathrm{C}_4 \quad {}_7\mathrm{C}_5 \quad {}_7\mathrm{C}_6 \quad {}_7\mathrm{C}_7 \\
{}_8\mathrm{C}_0 \quad {}_8\mathrm{C}_1 \quad {}_8\mathrm{C}_2 \quad {}_8\mathrm{C}_3 \quad {}_8\mathrm{C}_4 \quad {}_8\mathrm{C}_5 \quad {}_8\mathrm{C}_6 \quad {}_8\mathrm{C}_7 \quad {}_8\mathrm{C}_8 \\
{}_9\mathrm{C}_0 \quad {}_9\mathrm{C}_1 \quad {}_9\mathrm{C}_2 \quad {}_9\mathrm{C}_3 \quad {}_9\mathrm{C}_4 \quad {}_9\mathrm{C}_5 \quad {}_9\mathrm{C}_6 \quad {}_9\mathrm{C}_7 \quad {}_9\mathrm{C}_8 \quad {}_9\mathrm{C}_9 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

㊟ ${}_0\mathrm{C}_0=1$ とする．

☆二項係数の和

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$$

すなわち

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

例 $\sum_{k=0}^{2} {}_2\mathrm{C}_k = {}_2\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$\sum_{k=0}^{3} {}_3\mathrm{C}_k = {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

考 二項定理を用いて $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$

$a = 1$，$b = 1$ として

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 1^{n-k} 1^k$$

よって

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$$

3つの項の和の平方式の展開

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

㊂ $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$
$= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+b^2+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

㊀ $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$
$= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

㊁ $(x+y+1)^2 = x^2+y^2+1^2+2xy+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$
$= x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を展開せよ.

(1) $(x+y+2)^2$

(2) $(x+3y-z)^2$

㊅

(1) $(x+y+2)^2 = x^2+y^2+2^2+2xy+2\cdot y\cdot 2+2\cdot 2\cdot x$
$= \boldsymbol{x^2+y^2+2xy+4x+4y+4}$

(2) $(x+3y-z)^2 = \{x+3y+(-z)\}^2$
$= x^2+(3y)^2+(-z)^2+2x\cdot 3y+2\cdot(3y)\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$= \boldsymbol{x^2+9y^2+z^2+6xy-6yz-2zx}$

☆多項（三項）定理

n を自然数，p，q，r を 0 以上の整数とする．

$$(a+b+c)^n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$$

ただし

$\displaystyle\sum_{p+q+r=n}$ は $p+q+r=n$ をみたす 0 以上のすべての整数の組 $(p,\ q,\ r)$ での和を表す．

1. $\dfrac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$ を $(a+b+c)^n$ の展開式の 一般項（いっぱんこう） という．
2. $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ を 多項係数（たこうけいすう） という．

補 二項定理 と同じ考え方．3 個以上の項を多項とする．

考 $(a+b+c)^n$ の $a^p b^q c^r$ の係数は

□ を a または b または c として

□ × □ × □ × ⋯ × □ ＝（1 つの項）

であることから $\underbrace{aa\cdots a}_{p\text{ 個}}\ \underbrace{bb\cdots b}_{q\text{ 個}}\ \underbrace{cc\cdots c}_{r\text{ 個}}$ の並べ方 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$（通り）

★多項定理

n を自然数，p_1，p_2，$\cdots$，p_n を 0 以上の整数とする．

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n = \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=n} \frac{n!}{p_1!\,p_2!\cdot\cdots\cdot p_n!} {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdot\cdots\cdot {a_n}^{p_n}$$

ただし

$\displaystyle\sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=n}$ は $p_1+p_2+\cdots+p_n=n$ をみたす 0 以上のすべての整数の

組 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$ での和を表す．

立方の和または差になる展開

$\boxed{1}$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

㊢ 左辺を展開すると右辺になる.

$$\boxed{1}\ \begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2)&=a^3-a^2b+ab^2\\&\qquad\ \ +a^2b-ab^2+b^3\\&=a^3\qquad\qquad\qquad\ \ +b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{2}\ \begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2)&=a^3+a^2b+ab^2\\&\qquad\ \ -a^2b-ab^2-b^3\\&=a^3\qquad\qquad\qquad\ \ -b^3\end{aligned}$$

㊞ $\boxed{1}$ $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$

$\boxed{2}$ $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)=x^3-2^3=x^3-8$

例題 次の式を展開せよ.

(1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(2) $(2x-3y)(4x^2+12xy+9y^2)$

㊙

(1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x^3+(2y)^3=\boldsymbol{x^3+8y^3}$

(2) $(2x-3y)(4x^2+12xy+9y^2)=(2x)^3-(3y)^3=\boldsymbol{8x^3-27y^3}$

立方式への因数分解

$\boxed{1}$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$\boxed{2}$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

㊂ 右辺を展開すると左辺になる．

㊃ $\boxed{1}$ $x^3+6x^2+12x+8=x^2+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=(x+2)^3$

$\boxed{2}$ $x^3-6x^2+12x-8=x^2-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=(x-2)^3$

例題 次の式を因数分解せよ．

(1) x^3+3x^2+3x+1

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

㊁

(1) $x^3+3x^2+3x+1=\boldsymbol{(x+1)^3}$

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3=\boldsymbol{(x-2y)^3}$

立方の和または差の因数分解

$\boxed{1}$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\boxed{2}$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例 $\boxed{1}$ $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\boxed{2}$ $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+1

(2) x^3-64y^3

解

(1) $x^3+1=x^3+1^3=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(2) $x^3-64y^3=x^3-(4y)^3=\boldsymbol{(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)}$

☆ n 乗の差の因数分解

n を 2 以上の自然数とする.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

考 右辺を展開すると左辺になる.

例 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

例 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

例 $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

例 $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

★ n 乗の和の因数分解

n を 3 以上の奇数とする.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

考 右辺を展開すると左辺になる.

例 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

例 $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

例 $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^5 - 1$

(2) $x^5 + 1$

解

(1) $x^5 - 1 = x^5 - 1^5 = \boldsymbol{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$

(2) $x^5 + 1 = x^5 + 1^5 = \boldsymbol{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}$

☆3次の因数分解公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

考 右辺を展開すると左辺になる．

考
$$\begin{aligned}\underline{a^3+b^3}+c^3-3abc &= \underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}+c^3-3abc\\ &= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc\\ &= \{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}\\ &= \{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\ &= (a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca+bc-3ab)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

例
$$\begin{aligned}x^3+y^3+1-3xy &= x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1\\ &= (x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)\\ &= (x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)\end{aligned}$$

例題 次の式を因数分解せよ．

$x^3-y^3-1+3xy$

解

$$\begin{aligned}x^3-y^3-1+3xy &= x^3+(-y)^3+(-1)^3-3x(-y)(-1)\\ &= (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)\\ &= \boldsymbol{(x-y-1)(x^2+y^2+xy+x-y+1)}\end{aligned}$$

整式（多項式）

n を 0 以上の整数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 を実数，$a_n \neq 0$ とする．

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

の形で表される $f(x)$ を x に関する **n 次の整式** または **n 次の多項式** という．

ただし $n = 0$ かつ $a_0 = 0$ つまり $f(x) = 0$ は次数を定義しない．

㊫ $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ と表せる．

㊫ 0 は次数を定義しないが，$(-\infty)$ 次と考えることもできる．

㊫ 教科書では「多項式」と書いてあるが，ここでは「整式」と書くことにする．

整式の四則計算

2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ に対して

和：$f(x)+g(x)$，差：$f(x)-g(x)$，積：$f(x)g(x)$ はすべて整式になる．

商：$f(x) \div g(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\bigl(g(x) \neq 0\bigr)$ は整式にならないことがある．

★整式の次数

$f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ m 次の整式，n 次の整式とすると

$\boxed{1}$ 和 $f(x)+g(x)$，差 $f(x)-g(x)$ について

$m > n$ ならば　m 次の整式

$m < n$ ならば　n 次の整式

$m = n$ ならば　m 次以下の整式 または 0

$\boxed{2}$ 積 $f(x)g(x)$ は $(m+n)$ 次の整式

㊷ $f(x)$ が 2 次の整式，$g(x)$ が 1 次の整式 ならば

$\boxed{1}$ $f(x)+g(x)$ は 2 次の整式，$f(x)-g(x)$ は 2 次の整式

$\boxed{2}$ $f(x)g(x)$ は 3 次式

分数式

A，B を整式とするとき，

$\dfrac{A}{B}$ の形で表され，しかも B に文字を含む式を **分数式**（ぶんすうしき） といい，

B をその **分母**（ぶんぼ），A をその **分子**（ぶんし） という．

㊎ $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ のような式を分数式といい x^2+x+1 を分母，$2x+1$ を分子という．

分数式の約分

分数式 は

[1] 分母と分子に 0 でない同じ整式をかけて，もとの分数式に等しい．

[2] 分母と分子を共通因数で割って，もとの分数式に等しい．

すなわち

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (\text{ただし，} B \fallingdotseq 0,\ C \fallingdotseq 0)$$

とくに 分数式の分母と分子をその共通因数で割ることを **約分**（やくぶん）**する** という．

それ以上約分できない分数式は **既約**（きやく）**である** という．

既約分数式

それ以上約分できない分数式 を **既約分数式**（きやくぶんすうしき） という．

㊬ 分数式の計算の結果は基本的に既約分数式にする．

通分

2 つ以上の分数式の分母を同じ整式にすることを **通分**（つうぶん）**する**という．

㊎ 2 つの分数式 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x+1}$ を通分すると

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x(x+1)}$$

分数式の四則計算

分数式の四則計算は次のようになる．

1 和：$\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$ （分母が異なる場合は通分する）

2 差：$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$ （分母が異なる場合は通分する）

3 積：$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

4 商：$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

例 1 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{(x+1)+x}{x(x+1)}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

2 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

3 $\dfrac{x+1}{x^2}\times\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(x+1)x}{x^2(x+2)}=\dfrac{x+1}{x(x+2)}$

4 $\dfrac{x+1}{x^2}\div\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+1}{x^2}\times\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2\cdot x}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^3}$

恒等式

文字を含む等式において，その両辺に値が存在する限り，

含まれている文字にどのような値を代入しても 等式が常に成り立つとき，

その等式をそれらの文字についての **恒等式**（こうとうしき） という．

例 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を x の恒等式という．

1 次式以下の恒等式

a，b，p，q を定数とするとき

$\boxed{1}$ $ax + b = 0$ が x についての恒等式 $\iff$ $a = 0$ かつ $b = 0$

$\boxed{2}$ $ax + b = px + q$ が x についての恒等式 $\iff$ $a = p$ かつ $b = q$

考 $\boxed{1}$ $ax + b = 0$ ……(＊)

とおく．

（$\Longrightarrow$ について）

(＊) が x の恒等式とすると $x = 0, 1$ を代入しても等式は成り立つので

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

すなわち $a = 0$ かつ $b = 0$

（$\Longleftarrow$ について）

$a = 0$ かつ $b = 0$ ならば $ax + b = 0x + 0 = 0$

任意の x に対して (＊) は成り立つ．

すなわち (＊) は x の恒等式である．

$\boxed{2}$ $ax + b = px + q$ が x の恒等式

$\iff$ $(a - p)x + b - q = 0$ が x の恒等式

$\iff$ $a - p = 0$ かつ $b - q = 0$ （$\because$ $\boxed{1}$）

$\iff$ $a = p$ かつ $b = q$

2次式以下の恒等式

a, b, c, p, q, r を定数とするとき

$\boxed{1}$ $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式

$$\iff a=0 \text{ かつ } b=0 \text{ かつ } c=0$$

$\boxed{2}$ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ が x についての恒等式

$$\iff a=p \text{ かつ } b=q \text{ かつ } c=r$$

考 $\boxed{1}$ $ax^2+bx+c=0$ ……㊟

とおく.

($\Longrightarrow$ について)

㊟ が x の恒等式とすると $x=-1, 0, 1$ を代入しても等式は成り立つので

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$$

すなわち $a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$

($\Longleftarrow$ について)

$a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$ ならば $ax^2+bx+c=0x^2+0x+0=0$

任意の x に対して ㊟ は成り立つ.

すなわち ㊟ は x の恒等式である.

$\boxed{2}$ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ が x の恒等式

$\iff (a-p)x^2+(b-q)x+c-r=0$ が x の恒等式

$\iff a-p=0$ かつ $b-q=0$ かつ $c-r=0$ $(\because \boxed{1})$

$\iff a=p$ かつ $b=q$ かつ $c=r$

整式の恒等式

$P(x)$，$Q(x)$ を x についての整式（多項式）とするとき

$\boxed{1}$ $P(x)=0$ が x についての恒等式 $\iff$ $P(x)$ の各項の係数はすべて 0

$\boxed{2}$ $P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式

$\iff$ $P(x)$ と $Q(x)$ の次数が等しい かつ
両辺の同じ次数の各項の係数はそれぞれ等しい

すなわち $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$，$b_n,\ b_{n-1},\ \cdots,\ b_1,\ b_0$ を定数とするとき

$\boxed{1}$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ が x についての恒等式

$\iff$ $a_n=0$ かつ $a_{n-1}=0$ かつ $\cdots$ かつ $a_1=0$ かつ $a_0=0$

$\boxed{2}$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
が x についての恒等式

$\iff$ $a_n=b_n$ かつ $a_{n-1}=b_{n-1}$ かつ $\cdots$ かつ $a_1=b_1$ かつ $a_0=b_0$

㊫ 1 次式以下の恒等式，2 次式以下の恒等式

整式の割り算

$P(x)$ を整式，$A(x)$ を 0 でない整式とすると

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$$

$R(x)$ は 0 または $A(x)$ より次数の低い整式

となる $Q(x)$，$R(x)$ は 1 通りに定まる．

$$\begin{array}{r|l} & \overline{\quad Q(x)} \\ A(x) & \ \ P(x) \\ & \quad \vdots \\ \hline & \ \ R(x) \end{array}$$

このとき

$Q(x)$ を $P(x)$ を $A(x)$ で割ったときの 商(しょう) という．

$R(x)$ を $P(x)$ を $A(x)$ で割ったときの 余(あま)り という．

とくに

$R(x) = 0$ ならば $P(x)$ は $A(x)$ で **割り切れる** という．

$R(x) \neq 0$ ならば $P(x)$ は $A(x)$ で **割り切れない** という．

㊣補 整式と多項式は同じ式とする．

剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは

$$P(\alpha)$$

$$\begin{array}{rl} x-\alpha \,\big) & P(x) \\ & \quad\vdots \\ \cline{2-2} & P(\alpha) \end{array}$$

考 整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r (r は定数) とすると

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$$

これは x の恒等式である．

ここで $x=\alpha$ として　$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+r$

よって　$P(\alpha)=r$

$$\begin{array}{rl} & Q(x) \\ \cline{2-2} x-\alpha \,\big) & P(x) \\ & \quad\vdots \\ \cline{2-2} & \quad r \end{array}$$

例 $P(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ を $x-1$ で割ったときの余りは

$$P(1)=1+2+3+4+5+6=\mathbf{21}$$

因数定理

$P(x)$ を整式とする．

$$P(\alpha)=0 \iff P(x) \text{ が 1 次式 } x-\alpha \text{ を因数にもつ}$$

考 剰余の定理 より

$P(x)$ を $x-\alpha$ で割ると余りが 0

$\iff$ $P(\alpha)=0$

$\iff$ $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ となる整式 $Q(x)$ が存在する

$$\begin{array}{rl} & Q(x) \\ \cline{2-2} x-\alpha \,\big) & P(x) \\ & \quad\vdots \\ \cline{2-2} & \quad 0 \end{array}$$

例 $P(x)=x^3-x^2+x-1$ について

$P(1)=0$ であるから　$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

実際 $P(x)=(x-1)(x^2+1)$

等式の証明

恒等式 $A = B$ を証明するには，次のような方法がよく用いられる．

$\boxed{1}$ A か B の一方を変形して，他方を導く．

$\boxed{2}$ A と B の両方を変形して，同じ式を導く．

$\boxed{3}$ $A - B$ を変形して，0 になることを示す．

不等式の証明

不等式 $A > B$ を証明するには，次のような方法がよく用いられる．

$\boxed{1}$ $A - B$ を変形して，正になることを示す．

$\boxed{2}$ $B - A$ を変形して，負になることを示す．

$\boxed{3}$ A を変形して，B より大きいことを示す．

$\boxed{4}$ B を変形して，A より小さいことを示す．

$\boxed{5}$ $A > C$ かつ $C > B$ となる C が存在することを示す．

補 直接証明するのが厳しいときは，同値変形して考える．

実数の平方の性質

実数の平方は0以上である．

つまり $(\text{実数})^2 \geqq 0$

この性質から次が成り立つ．

$\boxed{1}$ 実数 a について

$$a^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは $a=0$

$\boxed{2}$ 2つの実数 a，b について

$$a^2+b^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは $a=0$ かつ $b=0$

$\boxed{3}$ 3つの実数 a，b，c について

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは $a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$

例 $\boxed{1}$ x を実数とするとき $(x-1)^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは $x-1=0$ すなわち $x=1$

$\boxed{2}$ x，y を実数とするとき $(x-1)^2+(y-2)^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは $x-1=0$ かつ $y-2=0$ すなわち $x=1$ かつ $y=2$

$\boxed{3}$ x，y，z を実数とするとき $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは $x-1=0$ かつ $y-2=0$ かつ $z-3=0$

すなわち $x=1$ かつ $y=2$ かつ $z=3$

負でない数の平方の大小関係

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，次のことが成り立つ．

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2 \iff a = b$

$\boxed{2}$ $a^2 > b^2 \iff a > b$

例 $\boxed{1}$ $3^2 = 3^2 \iff 3 = 3$

$\boxed{2}$ $3^2 > 2^2 \iff 3 > 2$

注 $3^2 = (-3)^2 \iff 3 = -3$ は成り立たない．

$(-3)^2 > 2^2 \iff -3 > 2$ は成り立たない．

このようなことがあるので，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ の条件がないと $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ は成り立たない．

平方の大小関係

a，b が 実数 のとき，次のことが成り立つ．

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$

$\boxed{2}$ $a^2 > b^2 \iff |a| > |b|$

例 $\boxed{1}$ $a^2 = 3^2 \iff |a| = |3|$ すなわち $a = \pm 3$

$\boxed{2}$ $a^2 > 2^2 \iff |a| > 2$ すなわち $a < -2,\ 2 < a$

補 $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ とすると絶対値記号がはずせる．

相加平均と相乗平均

2 つの実数 a，b について

$\boxed{1}$ $\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の 相加平均（そうかへいきん） という．

$\boxed{2}$ $a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{ab}$ を a と b の 相乗平均（そうじょうへいきん） という．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

（a と b の相加平均）$\geqq$（a と b の相乗平均）

つまり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a=b$

考 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$ （$\because \sqrt{a}-\sqrt{b}$ は実数）

よって $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqq 0$ である．

等号が成り立つのは $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\therefore a=b$

要

分数が扱いにくいので，次のように同値変形して使うことが多い．

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \iff a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a=b$

補 2 つの正の数 a，b があり，和 $a+b$ または積 ab の一方が定数になるときよく使う．

★実数の三角不等式

x，y を実数とするとき，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $|x+y| \leqq |x|+|y|$

等号が成り立つのは $xy \geqq 0$

$\boxed{2}$ $|x|-|y| \leqq |x+y|$

等号が成り立つのは $(x+y)y \leqq 0$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ をまとめて

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

と表せて，これを 三角不等式（さんかくふとうしき）という．

㊔ $\boxed{1}$ $|x+y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2-|x+y|^2 &= x^2+2|xy|+y^2-(x^2+2xy+y^2)\\ &= 2\big(|xy|-xy\big) \geqq 0\end{aligned}$$

これより $|x+y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

よって $|x+y| \leqq |x|+|y|$ である．

等号が成り立つのは $|xy|-xy=0$ より $xy \geqq 0$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ を考えて

$|x| = |(x+y)+(-y)| \leqq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|$

よって $|x|-|y| \leqq |x+y|$ である．

等号が成り立つのは $(x+y)(-y) \geqq 0$ すなわち $(x+y)y \leqq 0$

㊉別 $|x+y| \geqq 0$ である．

$|x|-|y|<0$ ならば $|x|-|y|<0 \leqq |x|+|y|$ より成り立つ．

$|x|-|y| \geqq 0$ ならば

$$\begin{aligned}|x+y|^2-(|x|-|y|)^2 &= x^2+2xy+y^2-\big(x^2-2|xy|+y^2\big)\\ &= 2(xy+|xy|) \geqq 0\end{aligned}$$

これより $\big(|x|-|y|\big)^2 \leqq |x+y|^2$

よって $|x|-|y| \leqq |x+y|$

等号が成り立つのは

$|x|-|y| \geqq 0$ かつ $xy+|xy|=0$ すなわち $|x|=|y|$ かつ $xy \leqq 0$

これは $(x+y)y \leqq 0$ と同値である．

★2次のコーシー・シュワルツの不等式

a，b，x，y が実数 のとき

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

等号が成り立つのは

$(a, b)=(0, 0)$ または $(x, y)=(0, 0)$ または $a:b=x:y$

補 コーシーの不等式，シュワルツの不等式，シュヴァルツの不等式 などとも言う．

考 $(a, b)=(0, 0)$ または $(x, y)=(0, 0)$ のとき（左辺）＝（右辺）＝0

$(a, b)\fallingdotseq(0, 0)$ かつ $(x, y)\fallingdotseq(0, 0)$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= (a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\\ &= (ax)^2+(ay)^2+(bx)^2+(by)^2-\left\{(ax)^2+2abxy+(by)^2\right\}\\ &= (ay)^2-2abxy+(bx)^2\\ &= (ay-bx)^2 \geqq 0 \ (\because ay-bx \text{ は実数})\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $ay-bx=0$

よって $a:b=x:y$

★3次のコーシー・シュワルツの不等式

a，b，c，x，y，z が実数 のとき

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

等号が成り立つのは

$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$

または $a:b:c=x:y:z$

考 $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ のとき （左辺）＝（右辺）＝0

$(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$ かつ $(x,\ y,\ z)\neq(0,\ 0,\ 0)$ のとき

（右辺）－（左辺）

$$\begin{aligned}
&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\\
&=(ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2\\
&\qquad -\left\{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2+2abxy+2bcyz+2cazx\right\}\\
&=(ay)^2-2abxy+(bx)^2+(bz)^2-2bcyz+(cy)^2+(cx)^2-2cazx+(az)^2\\
&=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

（$\because$ $ay-bx$，$bz-cy$，$cx-az$ はすべて実数）

等号が成り立つのは $ay-bx=0$ かつ $bz-cy=0$ かつ $cx-az=0$

すなわち $a:b=x:y$ かつ $b:c=y:z$ かつ $c:a=z:x$

よって $a:b:c=x:y:z$

★n 次のコーシー・シュワルツの不等式

a_1，a_2，$\cdots$，a_n，b_1，b_2，$\cdots$，b_n が実数のとき

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right)$$

すなわち

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2 \leqq \left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2\right)$$

等号が成り立つのは

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ または $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

または $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$

考 あ $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ または $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき

(左辺)＝(右辺)＝0

い $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\neq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ かつ $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\neq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき

t を実数として

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k t-b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left({a_k}^2t^2-2a_kt+{b_k}^2\right)$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)t^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)t+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2 \geqq 0$$

$\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)t^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)t+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)\leqq 0$$

すなわち $\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)$

等号が成り立つのは

$a_kt-b_k=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

つまり $b_1=t\,a_1$ かつ $b_2=t\,a_2$ かつ $\cdots$ かつ $b_n=t\,a_n$

すなわち $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$