

数学 I 図形と計量

三平方の定理(ピタゴラスの定理) / 三角比の定義 /
三角比と直角三角形の辺の長さ /
 30° , 45° , 60° の三角比(三角定規の三角比) / 三角比の相互関係 /
 $90^\circ - \theta$ の三角比 / 座標を用いた三角比の定義 /
 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の有名角の三角比 / $180^\circ - \theta$ の三角比 / 三角比の値の正負 /
正弦定理 / 余弦定理 / 三角形の面積 / 三角形の内接円の半径 /
★三角形の面積(ヘロンの公式) / ☆凸四角形の面積 /
内角の二等分線と比 / ★外角の二等分線と比 /
☆中線定理(パップスの定理) / 三角形の内角が鋭角・直角・鈍角になる条件 /
☆トレミーの定理(プトレマイオスの定理) / 円の周の長さとの面積 /
扇形の弧の長さとの面積 / 球の表面積と体積 / 柱体の体積 / 錐体の体積 /
相似と面積比 / 相似と表面積比・体積比 / 仰角・俯角 / ★円錐台の体積 /

□三平方の定理 (ピタゴラスの定理)

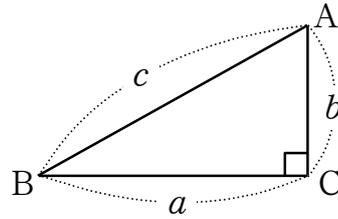
$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BCA = 90^\circ$

となる直角三角形 ABC において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

つまり

(直角をはさむ2辺の長さの2乗の和) = (斜辺の長さの2乗)



⑧ 証明方法はたくさんある.

⑨ (正方形の面積を2通りで表す)

右図のように考える.

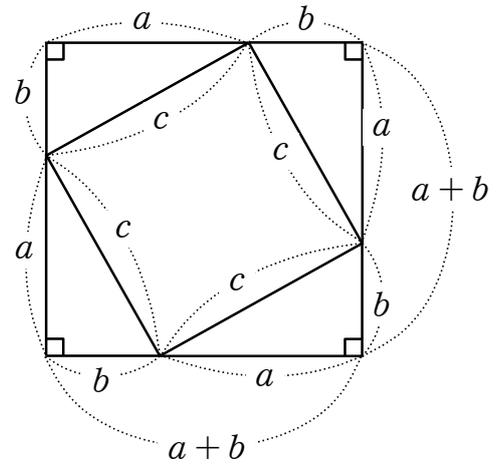
一辺の長さが $a + b$ の正方形の面積は $\triangle ABC$ の4つと一辺の長さが c の正方形の面積の総和に等しい.

これより

$$(a + b)^2 = \frac{1}{2} \cdot ab \times 4 + c^2$$

すなわち $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

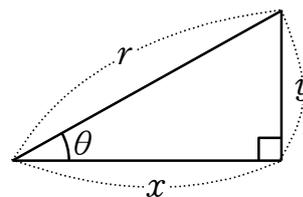
よって $a^2 + b^2 = c^2$



三角比の定義

右図のように3つの辺の長さが x , y , r , 1つの角が θ となる直角三角形において

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y}{r} = \sin \theta, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$



と表す.

① $\cos \theta$ を θ の^{よげん}余弦 または コサイン (cosine) という.

② $\sin \theta$ を θ の^{せいげん}正弦 または サイン (sine) という.

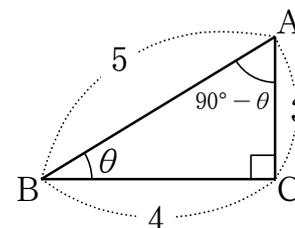
③ $\tan \theta$ を θ の^{せいせつ}正接 または タンジェント (tangent) という.

これらをまとめて ^{さんかくひ}三角比 という.

④ 例 右図の直角三角形において

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5}, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{4}{5}, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{4}{3}$$



要

三角比とは 直角三角形の2つの辺の比の関係を定義したもの.

⑤ 話 高校数学では登場しないが, 上の直角三角形で

$$\frac{r}{x} = \sec \theta, \quad \frac{r}{y} = \csc \theta, \quad \frac{x}{y} = \cot \theta$$

と表す.

$\sec \theta$ を θ の^{せいかつ}正割 または セカント (secant)

$\csc \theta$ を θ の^{よかつ}余割 または コセカント (cosecant)

$\cot \theta$ を θ の^{よせつ}余接 または コタンジェント (cotangent)

というのが, 覚えなくても大丈夫.

三角比と直角三角形の辺の長さ

右図のように

3つの辺の長さが x, y, r ($x^2 + y^2 = r^2$)

1つの角の大きさが θ

となる直角三角形において

① $x = r \cos \theta$

② $y = r \sin \theta$

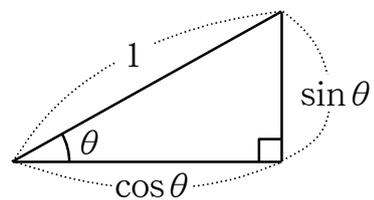
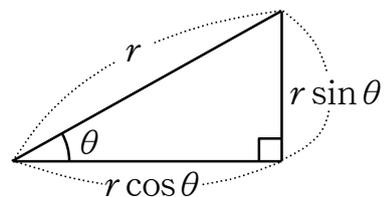
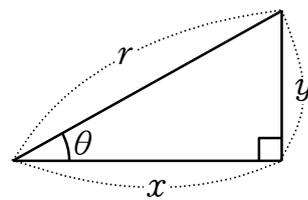
とくに $r = 1$ とすると

① $x = \cos \theta$

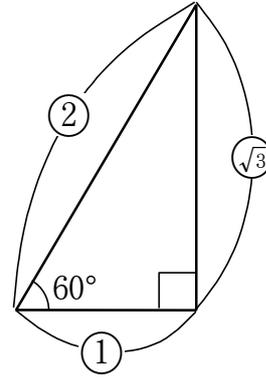
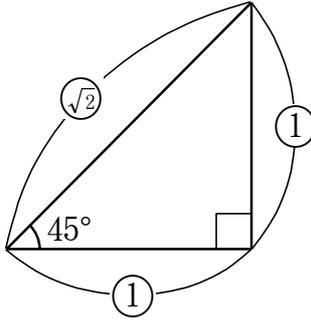
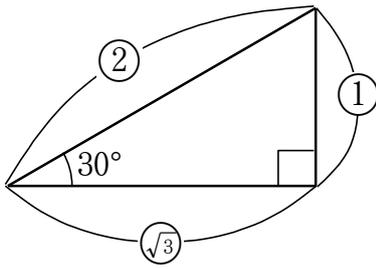
② $y = \sin \theta$

r の値によらず

③ $y = (\tan \theta)x$



30°, 45°, 60° の三角比 (三角定規の三角比)



θ	30°	45°	60°
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の相互関係

$$\boxed{1} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\boxed{2} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

$$\boxed{3} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

$$\boxed{4} \quad \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (\sin \theta \neq 0)$$

③ ① の両辺 $\cos^2 \theta$ で割って

$$1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\boxed{2} \text{ より } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

④ ① の両辺 $\sin^2 \theta$ で割って

$$\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\boxed{2} \text{ より } \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$90^\circ - \theta$ の三角比

- ① $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$
- ② $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
- ③ $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

⑧ 右図の直角三角形において

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r}, \sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r}, \tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}$$

$$\text{よって } \frac{y}{r} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\frac{x}{r} = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

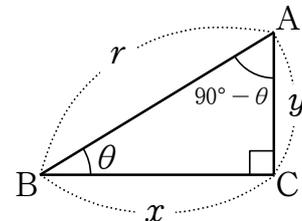
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{⑨ } \tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

⑩ ① $\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$

② $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$

③ $\tan 60^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ}$



座標を用いた三角比の定義

座標平面に原点 O を中心, 半径 1 の半円上に定点 $A(1, 0)$ と動点 P をとる.

$\angle AOP = \theta$ ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$) とし

点 P の x 座標を $\cos \theta$, y 座標を $\sin \theta$ とする.

すなわち

$$P(\cos \theta, \sin \theta)$$

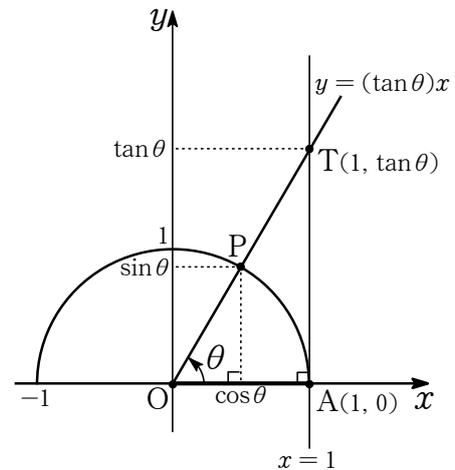
と定義する.

① 直線 OP の傾きは $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

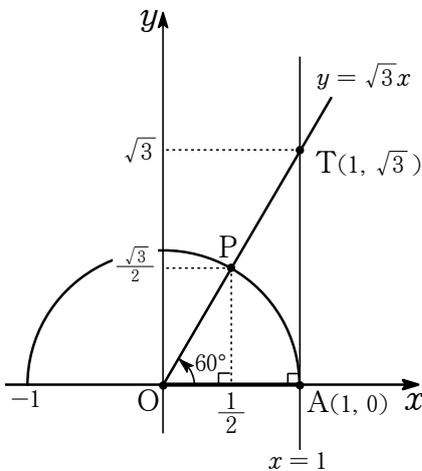
② 点 A における半円の接線 $x = 1$ と

直線 $OP : y = (\tan \theta)x$ の交点を T とすると $T(1, \tan \theta)$

点 T の y 座標は $\tan \theta$ となる.



例 $\theta = 60^\circ$ のとき



点 P の座標は

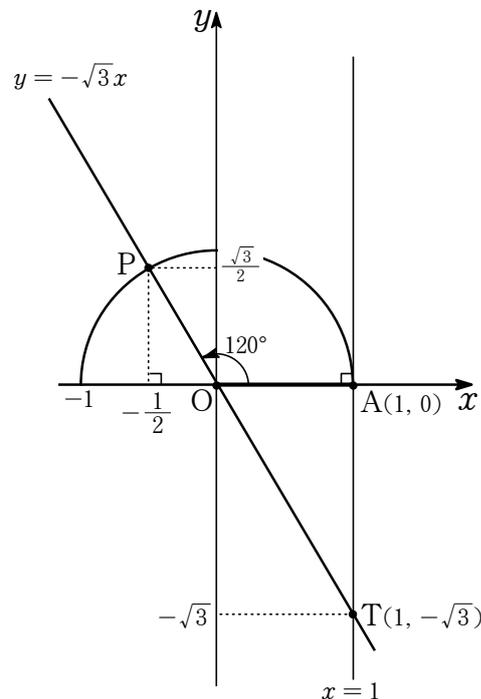
$$(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

直線 OP の傾きは $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

点 T の座標は $(1, \tan 60^\circ) = (1, \sqrt{3})$

$\theta = 120^\circ$ のとき



点 P の座標は

$$(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

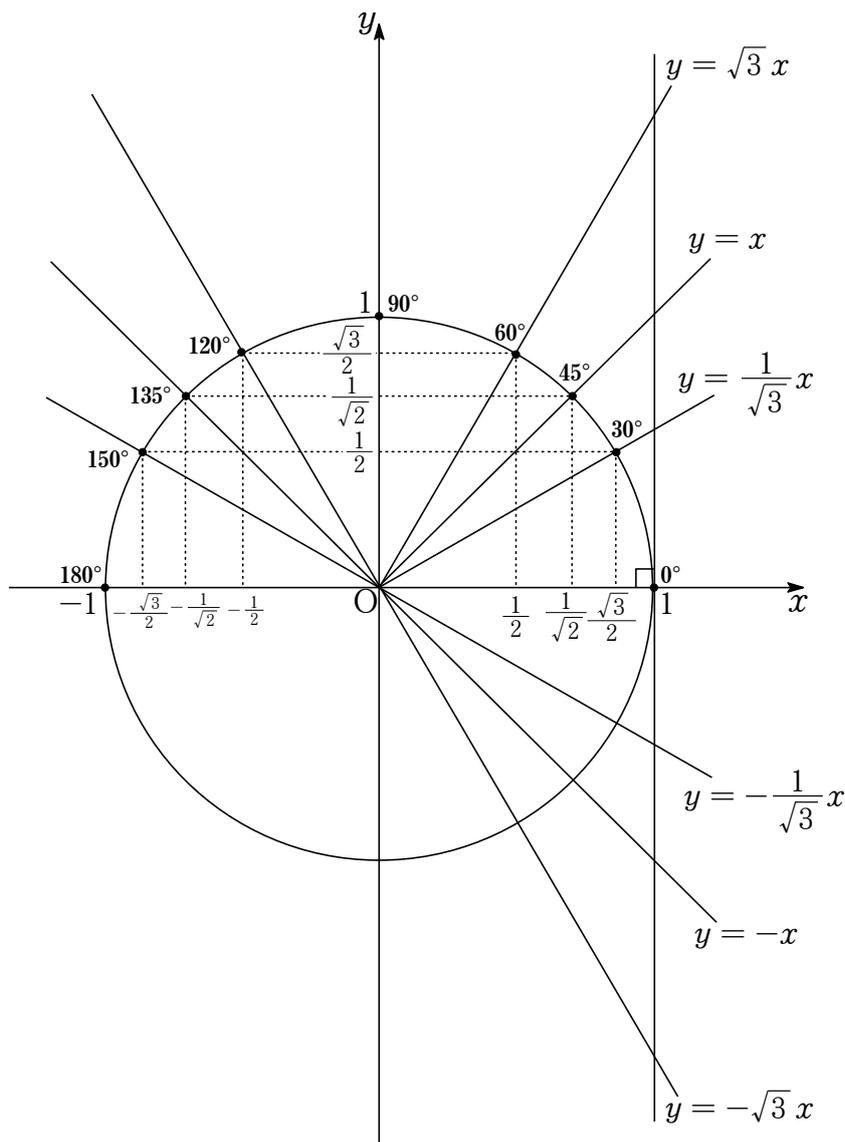
直線 OP の傾きは $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

点 T の座標は $(1, \tan 120^\circ) = (1, -\sqrt{3})$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の有名角の三角比

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\times	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Ⓢ 右下図の円を考える。
 角は円周上近くには書くことにしている。



180° - θ の三角比

① $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

② $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

③ $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

⑧ 右図において

$A(1, 0)$, $\angle AOP = \theta$, $\angle AOQ = 180^\circ - \theta$
 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(\cos(180^\circ - \theta), \sin(180^\circ - \theta))$

このとき点 $B(-1, 0)$ とおくと $\angle BOQ = \theta$

点 P と点 Q は y 軸に関して対称であるから

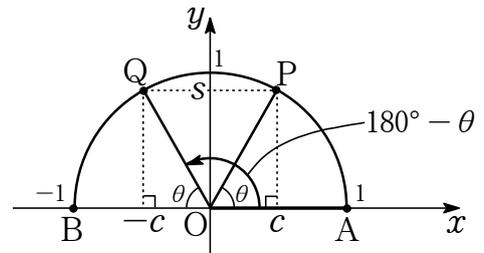
$P(c, s)$ とすると $Q(-c, s)$

よって

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$



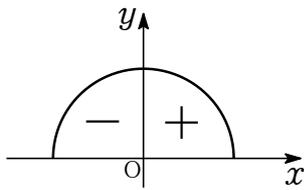
⑨ ① $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$

② $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$

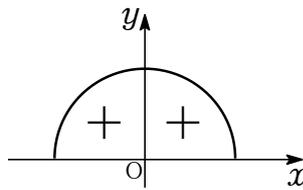
③ $\tan 140^\circ = -\tan 40^\circ$

三角比の値の正負

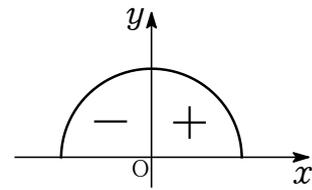
[$\cos \theta$ の正負]



[$\sin \theta$ の正負]



[$\tan \theta$ の正負]



θ	0°	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	180°
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1
$\sin \theta$	0	+	1	+	0
$\tan \theta$	0	+	/	-	0

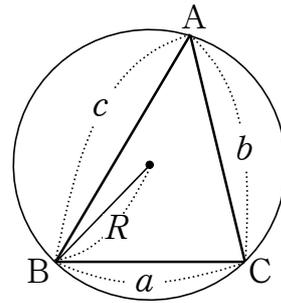
⑧ θ が鋭角 ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) ならば $\cos \theta > 0$, $\sin \theta > 0$, $\tan \theta > 0$

⑧ θ が鈍角 ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) ならば $\cos \theta < 0$, $\sin \theta > 0$, $\tan \theta < 0$

正弦定理

$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = A,$
 $\angle ABC = B, \angle BCA = C$ となる $\triangle ABC$ について
 外接円の半径を R として

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



⑧ 証明方法はいろいろある.

⑨ $A = \theta$ とし $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$ が成り立つことを示す.

① $\theta = 90^\circ$ のとき

BC が外接円の直径になるので $BC = 2R$

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = a$$

$$2R = BC = a$$

ゆえに $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$

② $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

円上に BA' が直径となるように点 A' をとると $\angle BCA' = 90^\circ$

円周角の定理から $\angle BA'C = \angle BAC = \theta$

$\triangle BA'C$ で三角比を考えて

$$\sin \theta = \frac{BC}{BA'} \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta = \frac{a}{2R}$$

ゆえに $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$

③ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき

$0^\circ < 180^\circ - \theta < 90^\circ$

円上に BD が直径となるように点 D をとると $\angle BCD = 90^\circ$

四角形 $ABDC$ は円に内接するから $\angle BAC + \angle BDC = 180^\circ$

これより $\angle BDC = 180^\circ - \theta$

$\triangle BDC$ で三角比を考えて

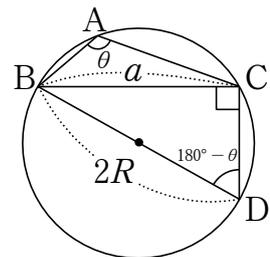
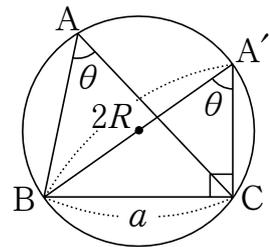
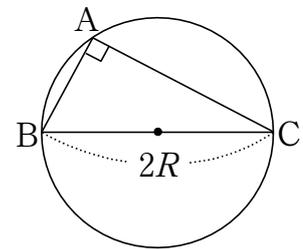
$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{BC}{BD} \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta = \frac{a}{2R}$$

ゆえに $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$

①, ②, ③ より $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$ が示された.

$B = \theta, C = \theta$ としても同様である.

よって $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ は示された.



余弦定理

$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = A, \angle ABC = B, \angle BCA = C$ となる $\triangle ABC$ について、3 辺の長さ と余弦の関係が次のように成り立つ。

① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

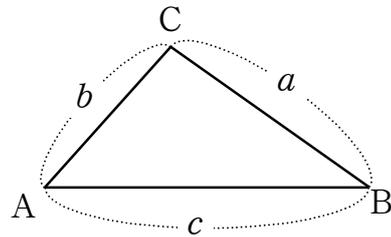
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

② $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



④ (三平方の定理を考える)

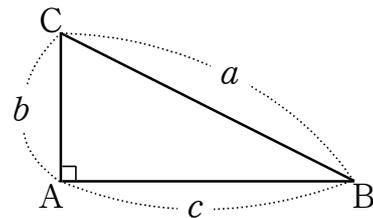
$A = \theta$ とし $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$ を示す。

④あ $\theta = 90^\circ$ のとき

三平方の定理から $a^2 = b^2 + c^2$

ここで $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$

ゆえに $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$



④い $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

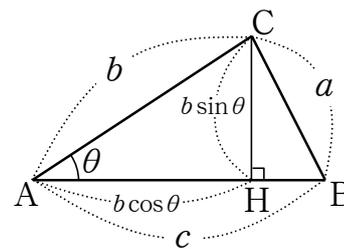
$CH = b \sin \theta$

$AH = b \cos \theta$

$BH = |AB - AH| = |c - b \cos \theta|$

$\triangle BCH$ に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = BH^2 + CH^2 \\ &= |c - b \cos \theta|^2 + (b \sin \theta)^2 \\ &= c^2 - 2bc \cos \theta + b^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \end{aligned}$$



④う $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき

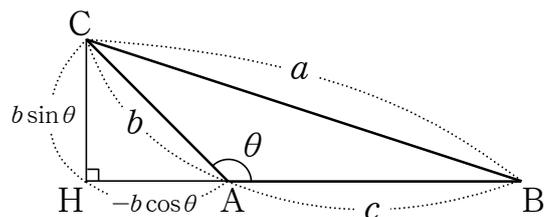
点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$CH = b \sin \theta$

$AH = -b \cos \theta$

$BH = |AB + AH| = |c - b \cos \theta|$

$\triangle BCH$ に三平方の定理を用いて ④い と同様。



④あ, ④い, ④う より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$

変形して $\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$B = \theta, C = \theta$ としても同様に示せる。

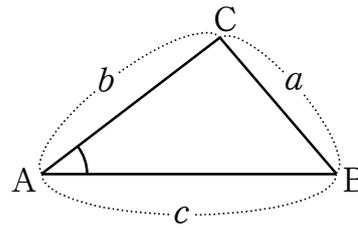
三角形の面積

$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = A, \angle ABC = B, \angle BCA = C$ となる $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



⑧ (三平方の定理を考える)

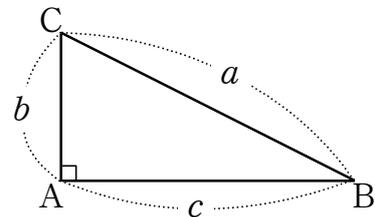
$A = \theta$ とし $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ を示す.

⑨ $\theta = 90^\circ$ のとき

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CA = \frac{1}{2}bc$$

ここで $\sin \theta = \sin 90^\circ = 1$

ゆえに $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$



⑩ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

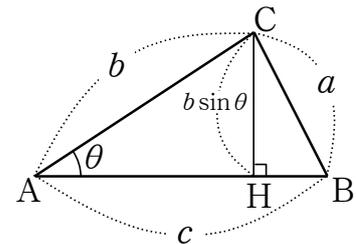
点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$$CH = b \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CH$$

$$= \frac{1}{2}c \cdot b \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin \theta$$



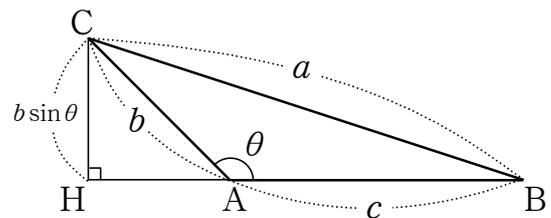
⑪ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき

点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$$CH = b \sin \theta$$

⑩ と同様にして

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$$



⑨, ⑩, ⑪ より $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$

$B = \theta, C = \theta$ としても同様である.

三角形の内接円の半径

$\triangle ABC$ は $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする.

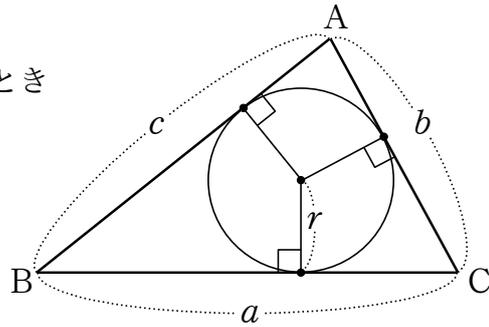
$\triangle ABC$ の面積を S , 内接円の半径を r とするとき

① $S = \frac{r}{2}(a + b + c)$

② $r = \frac{2S}{a + b + c}$

つまり

(内接円の半径) = $\frac{2 \times (\text{三角形の面積})}{(\text{3辺の長さの和})}$



② ① 内接円の中心を I とし、面積の関係から

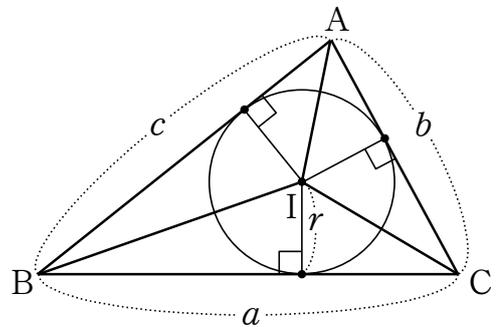
$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$

すなわち

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$= \frac{r}{2}(a + b + c)$$

② ① を変形して $r = \frac{2S}{a + b + c}$



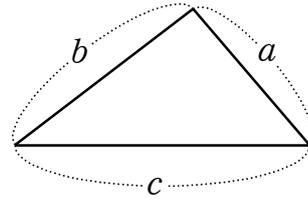
★三角形の面積 (ヘロンの公式)

3 辺の長さが a, b, c となる三角形の面積を S とすると

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

として

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



⑧ $\angle BAC = \theta$ とする.

余弦定理を用いて $\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ①

$S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ が成り立つことから 2 乗して

$$S^2 = \frac{1}{4}(bc)^2 \sin^2 \theta$$

$$= \frac{1}{4}(bc)^2(1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{4}(bc)^2(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{4}(bc)^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) (\because \text{①})$$

$$= \frac{1}{4}(bc)^2 \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{1}{4}(bc)^2 \frac{\{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2\} \{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\}}{4(bc)^2}$$

$$= \frac{1}{16} \{(b+c)^2 - a^2\} \{a^2 - (b-c)^2\}$$

$$= \frac{1}{16} \{(b+c) + a\} \{(b+c) - a\} \{a + (b-c)\} \{a - (b-c)\}$$

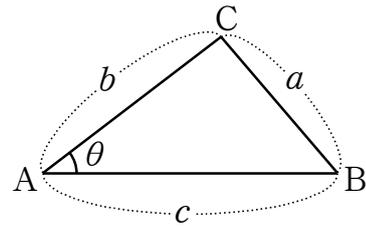
$$= \frac{1}{2^4} (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2}$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c) \quad (\because s = \frac{a+b+c}{2})$$

よって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



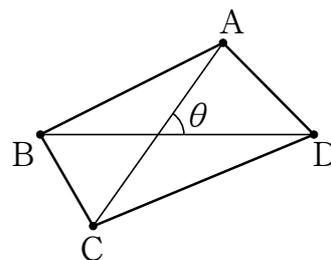
☆凸四角形の面積

凸四角形 ABCD の面積を S とする.

2 つの対角線 AC, BD のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)

とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \theta$$



⑧ 2 つの対角線 AC と BD の交点を O, $\angle AOD = \theta$ とする.

点 A を通り線分 BD に平行な直線を l_A

点 C を通り線分 BD に平行な直線を l_C

点 B を通り線分 AC に平行な直線を m_B

点 D を通り線分 AC に平行な直線を m_D

として

l_A と m_B の交点を P, l_C と m_B の交点を Q

l_C と m_D の交点を R, l_A と m_D の交点を T

とすると

$$PQ \parallel AC \parallel TR, \quad PT \parallel BD \parallel QR$$

なので

四角形 PQRT, 四角形 OAPB, 四角形 OBQC, 四角形 OCRD, 四角形 ODTA はすべて平行四辺形である.

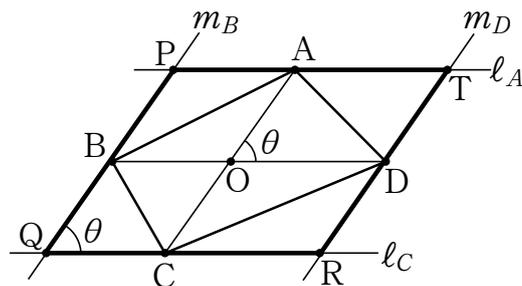
$\triangle OAB \equiv \triangle PAB$, $\triangle OBC \equiv \triangle QBC$, $\triangle OCD \equiv \triangle RCD$, $\triangle ODA \equiv \triangle TDA$ となるので, 平行四辺形 PQRT の面積は

$$2 \times (\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA) = 2S \quad \dots\dots ①$$

また $\angle PQR = \angle AOD = \theta$ であるから, 平行四辺形 PQRT の面積は

$$\begin{aligned} 2 \times \triangle PQR &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR \cdot \sin \theta \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \theta \quad (\because PQ = AC, QR = BD) \\ &= AC \cdot BD \cdot \sin \theta \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

① = ② として $2S = AC \cdot BD \cdot \sin \theta$ すなわち $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \theta$
 $\angle AOB = \theta$, $\angle BOC = \theta$, $\angle COD = \theta$ としても同様である.



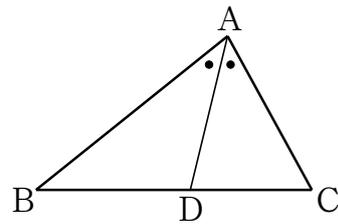
内角の二等分線と比

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

点 D は線分 BC を $AB : AC$ に内分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$

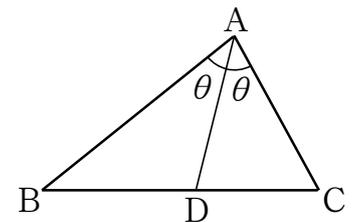


⑨ 逆も成り立つ.

⑩ (面積比を考える)

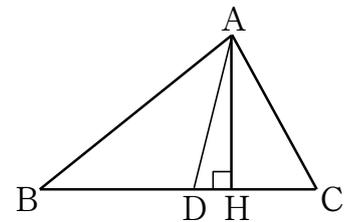
$\angle ABD = \angle CAD = \theta$ とする.

面積比から $\frac{\triangle ABD}{\triangle CAD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin \theta}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin \theta} = \frac{AB}{AC} \dots\dots ①$



また、点 A から直線 BC へ垂線 AH を下ろすと

面積比から $\frac{\triangle ABD}{\triangle CAD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot DC \cdot AH} = \frac{BD}{DC} \dots\dots ②$



① = ② として $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ すなわち $AB : AC = BD : DC$

⑪ $AB = AC$ のとき

$\triangle ABC$ は二等辺三角形となり $BD = DC$ であるから $AB : AC = BD : DC = 1 : 1$

★外角の二等分線と比

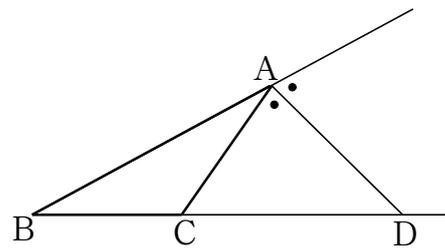
AB ≠ AC とする.

△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に外分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



⑨ 逆も成り立つ.

⑩ (面積比を考える)

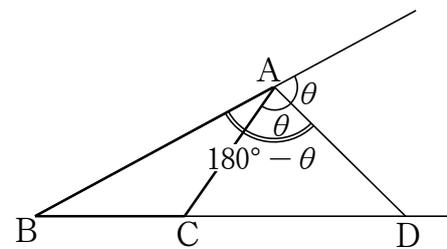
外角を二等分したそれぞれの角を θ とおくと $\angle BAD = 180^\circ - \theta$, $\angle CAD = \theta$

$$\begin{aligned} \text{面積比から } \frac{\triangle ABD}{\triangle CAD} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin(180^\circ - \theta)}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin \theta} \\ &= \frac{AB}{AC} \dots\dots ① \end{aligned}$$

また、点 A から直線 BC へ垂線 AH を下ろすと

$$\begin{aligned} \text{面積比から } \frac{\triangle ABD}{\triangle CAD} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot DC \cdot AH} \\ &= \frac{BD}{DC} \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$① = ② \text{ として } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \text{ すなわち } AB : AC = BD : DC$$

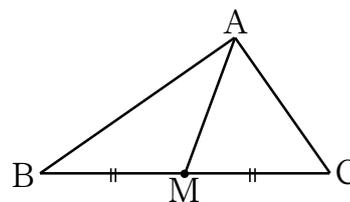


⑪ AB = AC のとき、∠A の外角の二等分線は辺 BC と平行になり、点 D は存在しない.

☆中線定理 (パップスの定理)

$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$



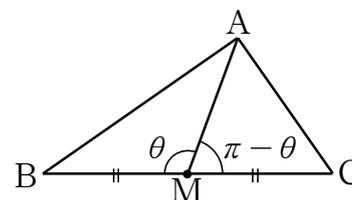
⑧ $\angle AMB = \theta$ とおくと $\angle AMC = \pi - \theta$

$\triangle ABM$, $\triangle ACM$ にそれぞれ余弦定理を用いて

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos(\pi - \theta) \\ &= AM^2 + BM^2 + 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos \theta \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

よって ① + ② として $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



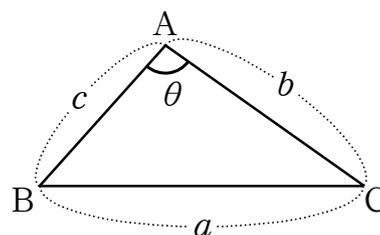
三角形の内角が鋭角・直角・鈍角になる条件

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \theta$ とする $\triangle ABC$ において

① θ が 鋭角 $\iff b^2 + c^2 > a^2$

② θ が 直角 $\iff b^2 + c^2 = a^2$

③ θ が 鈍角 $\iff b^2 + c^2 < a^2$



④ 余弦定理を用いて $\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

① θ が 鋭角 $\iff \cos \theta > 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 > 0$

② θ が 直角 $\iff \cos \theta = 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 = 0$ (三平方の定理)

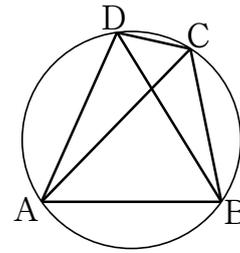
③ θ が 鈍角 $\iff \cos \theta < 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 < 0$

☆トレミーの定理 (プトレマイオスの定理)

四角形 ABCD が円に内接するとき

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

つまり (向かい合う辺の積の和) = (対角線の積)



⑨ 逆も成り立つ.

⑩ (余弦定理を使う)

$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y$ とする.

$\triangle ABD, \triangle BAC, \triangle CBD, \triangle DAC$ にそれぞれ余弦定理を用いて

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad} \dots\dots①$$

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} \dots\dots②$$

$$\cos C = \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc} \dots\dots③$$

$$\cos D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd} \dots\dots④$$

四角形 ABCD が円に内接することより $A + C = \pi$ であるから

$$\cos A = \cos(\pi - C) = -\cos C$$

①, ③ より

$$\frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad} = -\frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc}$$

両辺 $2abcd$ をかけて

$$bc(a^2 + d^2 - y^2) = -ad(b^2 + c^2 - y^2)$$

これより

$$(ad + bc)y^2 = bca^2 + d(b^2 + c^2)a + bcd^2$$

$$\therefore y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \dots\dots⑤$$

同様に $B + D = \pi$ であるから

$$\cos B = \cos(\pi - D) = -\cos D$$

②, ④ より

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} = -\frac{d^2 + c^2 - x^2}{2cd}$$

⑤ で b と d, y と x をそれぞれ入れかえることを考えて

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \dots\dots⑥$$

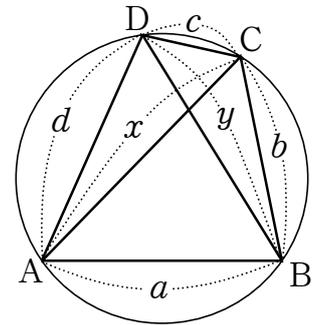
⑤ × ⑥ として

$$x^2 y^2 = \frac{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)^2}{(ad + bc)(ab + cd)}$$

すなわち $(xy)^2 = (ac + bd)^2$

$xy > 0, ac + bd > 0$ であるから $xy = ac + bd$

よって $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$



□円の周の長さ と 面積

半径 r の円 について

- ① 周の長さを l とすると

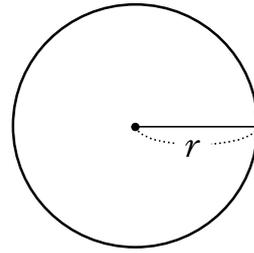
$$l = 2\pi r$$

つまり (円周の長さ) = (直径) $\times \pi$

- ② 面積を S とすると

$$S = \pi r^2$$

つまり (円の面積) = (半径)² $\times \pi$



⑨ 円周率 $\pi = \frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})}$

□扇形の弧の長さ^{おうぎ}と面積

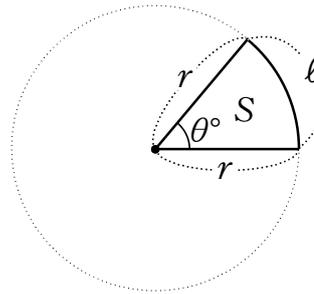
半径 r , 中心角 θ° の扇形^{おうぎ}について

① 弧の長さを l とすると

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

② 面積を S とすると

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360} \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2} r l$$



④ 半径が同じ円の扇形の弧の長さや面積は, 中心角に比例する.

④ 半径が 2, 中心角が 60° の扇形の弧の長さを l , 面積を S とすると

① 弧の長さは $l = 2\pi \cdot 2 \times \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi$

② 面積は $\pi \cdot 2^2 \times \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi$

□球の表面積と体積

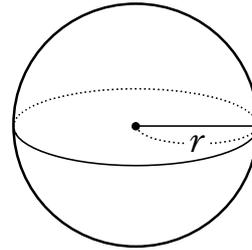
半径 r の球 について

- ① 表面積を S とすると

$$S = 4\pi r^2$$

- ② 体積を V とすると

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{または} \quad V = \frac{1}{3}rS$$



④ 例 半径が 3 の球について

- ① 表面積は $4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

- ② 体積は $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

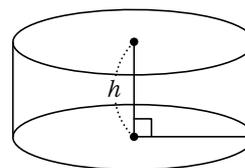
□柱体の体積

底面積が S 、高さが h の ^{ちゆうたい}柱体(円柱, 三角柱, 四角柱など)

の体積を V とすると

$$V = Sh$$

つまり (柱体の体積) = (底面積) × (高さ)



(図は円柱)

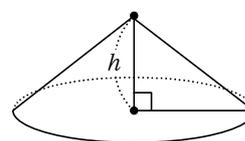
□錐体の体積

底面積が S 、高さが h の ^{すいたい}錐体(円錐, 三角錐, 四角錐など)

の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

つまり (錐体の体積) = (柱体の体積) × $\frac{1}{3}$



(図は円錐)

□相似と面積比

平面上で相似比が $a : b$ となる2つの図形の面積比は $a^2 : b^2$

□相似と表面積比・体積比

空間内で相似比が $a : b$ となる2つの立体について

① 表面積比は $a^2 : b^2$

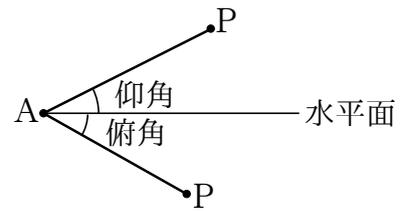
② 体積比は $a^3 : b^3$

仰角・俯角

測量などで、点 A から点 P をみるとき、A を通る水平面と AP のなす角について

① P が水平面より上にあるならば ^{ぎょうかく} 仰角 という.

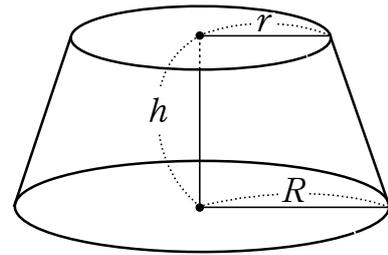
② P が水平面より下にあるならば ^{ふかく} 俯角 という.



★円錐台の体積

上面の円の半径が r ，下面の円の半径が R ，高さが h の円錐台の体積を V とすると

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$$



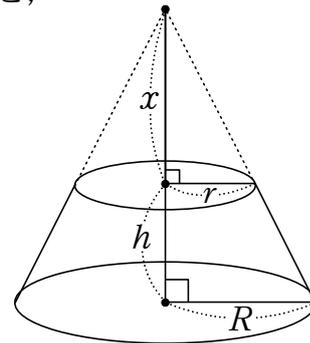
⑧ $r < R$ のとき

右図のように底面の半径が r ，高さが x の円錐を設定すると，相似比を考えて

$$x : r = (x + h) : R \quad \text{すなわち} \quad r(x + h) = xR$$

$$\text{これより} \quad x = \frac{rh}{R - r} \quad \dots\dots \text{①}$$

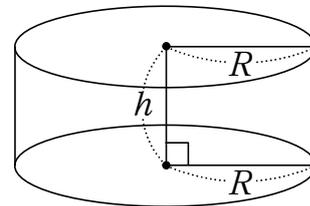
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi R^2(x + h) - \frac{1}{3}\pi r^2x \\ &= \frac{\pi}{3}\{(R^2 - r^2)x + R^2h\} \\ &= \frac{\pi}{3}\left\{(R + r)(R - r)\frac{rh}{R - r} + R^2h\right\} \quad (\because \text{①}) \\ &= \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2) \end{aligned}$$



$r > R$ のときも同様である。

$r = R$ のときは半径 R ，高さが h の円錐であり

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot R + R^2) \\ &= \frac{\pi h}{3} \cdot 3R^2 \\ &= \pi R^2h \end{aligned}$$



⑨ $r = R$ のときは円柱の体積になる。