数学Ⅰ　2次関数

関数／ 定義域と値域／ 関数の表記／ 座標平面／ 座標平面の象限／
関数のグラフ／ 定数関数／ 定数関数のグラフ／ 1次関数／ 1次関数のグラフ／
2次関数／ 頂点が原点の2次関数のグラフ／比例を表す式／
2乗の比例を表す式／ 標準形の2次関数のグラフ／ 平方完成／
基本的な平方完成／ 2次式の平方完成の方法／
平方完成と放物線の頂点の座標／ 因数分解と2次関数のグラフ／
2次関数の式の形／ 平行移動／ 座標平面における平行移動／
直線に関する対称移動／ 座標平面における x 軸に関する対称移動／
座標平面における y 軸に関する対称移動／
★座標平面における x 軸に平行な直線に関する対称移動／
★座標平面における y 軸に平行な直線に関する対称移動／
点に関する対称移動／ 座標平面における原点に関する対称移動／
★座標平面における点に関する対称移動／ 2次関数のグラフの平行移動／
2次関数のグラフの x 軸に関する対称移動／
2次関数のグラフの y 軸に関する対称移動／
2次関数のグラフの原点に関する対称移動／ 関数の最大値・最小値／
2次方程式／ 因数分解された形の2次方程式の解／
平方の形と2次方程式の解／ 2次方程式の解の公式 Ⅰ／
☆2次方程式の解の公式 Ⅱ／ 平方の形の2次方程式の実数解の個数／
2次方程式の判別式／ 2次方程式の実数解の個数 Ⅰ／
☆2次方程式の実数解の個数 Ⅱ／ ☆2次方程式の実数解の差 Ⅱ／
☆2次方程式の解と因数分解／ 2次関数のグラフと x 軸の位置関係／
因数分解と2次方程式・2次不等式の解／
2次方程式の実数解と2次不等式の解

□関数

2 つの変数 x, y があって

x の値(あたい)を定めると それに応じて y の値がただ 1 つだけ定まることを

y は x の関数(かんすう)という.

㊟例 $y=2x$ の関係は $x=1$ とすると $y=2$ と y の値がただ 1 つだけ定まる.
x の値を定めると y の値が 1 つだけ定まるので「y は x の関数」である.

㊟ $y^2=x$ の関係は $x=1$ とすると $y^2=1$ であるから $y=\pm 1$
これは y の値が 2 つ決まり，y がただ 1 つ決まらないので「y は x の関数」ではない.

例題 次の中で y が x の関数となるものをすべて選べ.

Ⓐ $y=-x$

Ⓑ $x^2+y^2=1$

Ⓒ 半径が x cm の円の面積 y cm^2

㊏ Ⓐ, Ⓒ

定義域と値域

y が x の関数であるとき

1 変数 x のとりうる値の範囲を

定義域（ていぎいき） または x の**変域**（へんいき） という.

2 x が定義域全体を動くとき変数 y がとる値の範囲を

値域（ちいき） または y の**変域**（へんいき） という.

例 関数 $y=2x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ について

1 定義域は $0 \leqq x \leqq 1$

2 定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ 全体を x が動くときの y のとる値の範囲は $0 \leqq y \leqq 2$

値域は $0 \leqq y \leqq 2$

例題 y は x 関数で $y=5x\ (1 \leqq x \leqq 2)$ とする,

このとき, 定義域と値域をそれぞれ求めよ.

解 **定義域は $\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 2}$, 値域は $\boldsymbol{5 \leqq y \leqq 10}$**

関数の表記

y が x の関数であることを $y=f(x)$ と表す.

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ で表し

$x=a$ のときの 関数 $f(x)$ の **値** という.

㊎ 関数 $y=2x+1$ について $f(x)=2x+1$ として $y=f(x)$ と表せる.
$x=a$ のとき $y=2a+1$ であることは $f(a)=2a+1$
$x=1$ のとき $y=2\cdot1+1=3$ であることは $f(1)=2\cdot1+1=3$
$x=-1$ のとき $y=2\cdot(-1)+1=-1$ であることは $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

例題　x の関数 $f(x)=3x^2+1$ について，$f(2)$，$f(-1)$，$f(a)$ の値をそれぞれ求めよ.

解 $f(2)=3\cdot2^2+1=\mathbf{13}$
$f(-1)=3\cdot(-1)^2+1=\mathbf{4}$
$f(a)=\boldsymbol{3a^2+1}$

座標平面

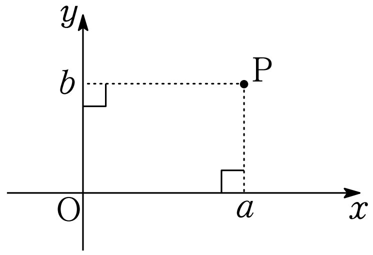
平面上に直交する 2 つの座標軸（ざひょうじく）を定めると

その平面上の点 P の位置は右の下の図のように 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される．

これを点 P の座標（ざひょう）といい $\mathrm{P}(a,\ b)$ とかく．

また 座標軸の交点を **原点**（げんてん） といい $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とかく．

座標軸の定められた平面を **座標平面**（ざひょうへいめん） という．



とくに何も条件がないとき，座標平面の座標軸は x 軸，y 軸として考える．

座標平面の象限

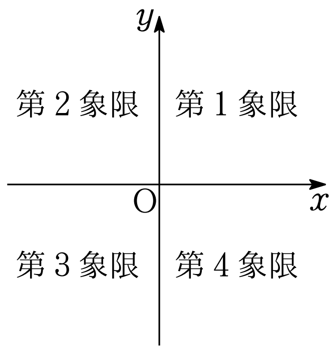
座標平面を座標軸により 4 つの部分に分けて，次のようにいう．

$\boxed{1}$ $\{(x,\ y)\mid x>0$ かつ $y>0\}$ を **第 1 象限**（しょうげん）

$\boxed{2}$ $\{(x,\ y)\mid x<0$ かつ $y>0\}$ を **第 2 象限**

$\boxed{3}$ $\{(x,\ y)\mid x<0$ かつ $y<0\}$ を **第 3 象限**

$\boxed{4}$ $\{(x,\ y)\mid x>0$ かつ $y<0\}$ を **第 4 象限**



ただし

$\{(x,\ y)\mid x=0$ または $y=0\}$ (座標軸) はどの象限にも含まれない．

補 $x>0$，$y>0$ の部分を第 1 象限といい，反時計回り (左回り) に第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限という．

例題 座標平面で点 $(-3,\ 2)$ は第何象限にあるか．

解 点 $(-3,\ 2)$ は **第 2 象限** にある．

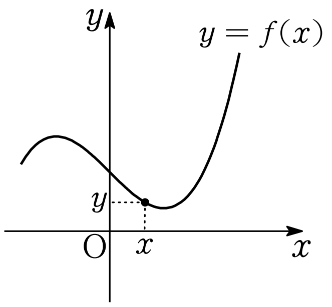
関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ について

$\{(x,\, y) \mid y = f(x)\}$ の点全体からなる図形を

座標平面に表したものを

関数 $y = f(x)$ の **グラフ** という.



㊎ グラフは点の集まりというイメージを持っておきたい.
そうすると，平行移動や対称移動を理解しやすいと思われる.

定数関数

関数 $y=f(x)$ について

1. どのように x の値を定めても，y が一定の値をとる
2. 定義域内の2つの値 a，b に対し，常に $f(a)=f(b)$

これを満たすものを **定数関数**（ていすうかんすう）という．

定数関数は c を定数として

$y=c$ または $f(x)=c$

の形で表される．

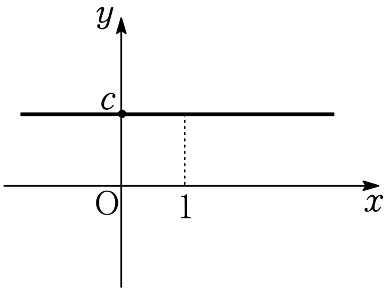
例 $y=5$，$f(x)=5$

定数関数のグラフ

座標平面で

定数関数 $y=c$

のグラフは **直線**（ちょくせん）であり，次のような概形（がいけい）になる．



このグラフについて

1. 傾き（かたむ）きが 0
2. y 切片（せっぺん）が c

□1次関数

x の1次式で表される関数を x の **1次関数** という．

x の1次関数 y は a，b を定数として

$$y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

の形で表される．

㊑ $y = 3x + 2$

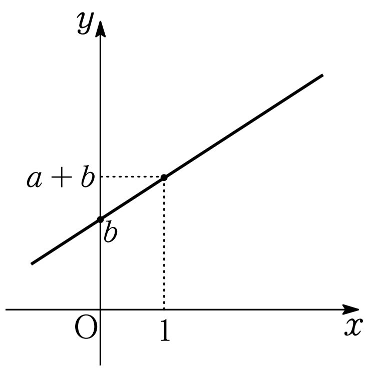
□1次関数のグラフ

座標平面で

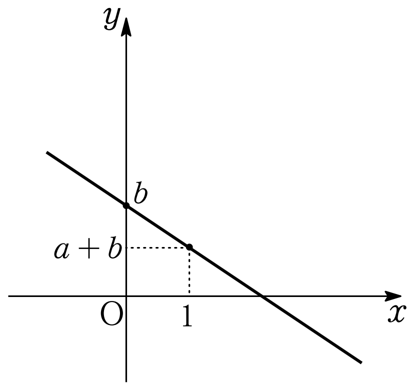
$$1\text{次関数 } y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

のグラフは直線（ちょくせん）であり，次のような概形（がいけい）となる．

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 傾きが a

$\boxed{2}$ y 切片が b

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{右上がり} \quad (a > 0) \\ \text{右下がり} \quad (a < 0) \end{cases}$

㊟ $a = 0$ のとき定数関数 $y = b$ となり，グラフは「傾きが0の直線」になる．

□2次関数

x の2次式で表される関数を x の **2次関数** という.

x の2次関数 y は a, b, c を定数として

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

の形で表される.

㊙例 $y = 2x^2 + 3x + 1$

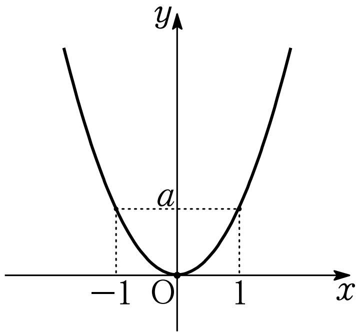
□頂点が原点の2次関数のグラフ

座標平面で

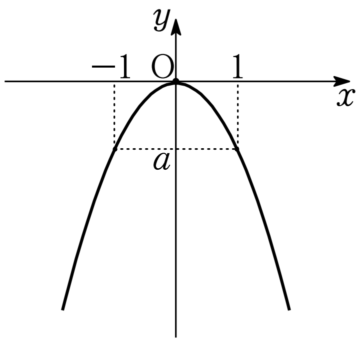
$$2\text{次関数 } y = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

のグラフは**放物線**(ほうぶつせん) であり, 次のような概形(がいけい)になる.

〔$a > 0$ のとき〕



〔$a < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 軸(じく)の方程式は $x = 0$

$\boxed{2}$ 頂点(ちょうてん)は $(0, 0)$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{下に凸} & (a > 0) \\ \text{上に凸} & (a < 0) \end{cases}$

□比例を表す式

y が x の関数で a を定数として $y = ax$ と表されるとき

ひれい

y は x に **比例する** という．

ひれいていすう

このとき a を **比例定数** という．

㊀ $y = 3x$ について y は x に比例する．次の表のような値をとることもわかる．

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	$\cdots$

$x = k$ のとき $y = 3k$

グラフは原点を通り傾き 3 の直線である．

□ 2 乗の比例を表す式

y が x の関数で a を定数として $y = ax^2$ と表されるとき

ひれい

y は x の 2 乗に **比例する** という．

ひれいていすう

このとき a を **比例定数** という．

㊀ $y = 3x^2$ について y は x^2 に比例する．次の表のような値をとることもわかる．

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	48	27	12	3	0	3	12	27	48	$\cdots$

$x = \pm k$ のとき $y = 3(\pm k)^2 = 3k^2$

グラフは原点が頂点で y 軸に対称な下に凸の放物線である．

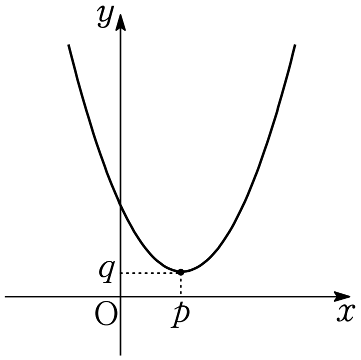
標準形の2次関数のグラフ

座標平面で

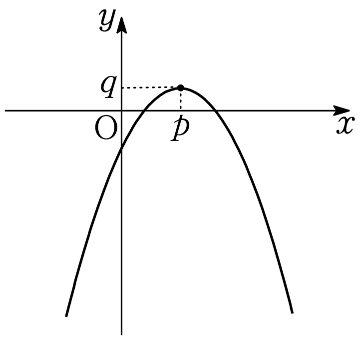
　2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ $(a \neq 0)$

のグラフは **放物線** であり，次のような概形となる．

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

1. 頂点の座標は (p, q)
2. 軸の方程式は $x=p$
3. $\begin{cases} \text{下に凸} & (a>0) \\ \text{上に凸} & (a<0) \end{cases}$
4. 定義域は実数全体
5. 値域は $\begin{cases} y \geqq q & (a>0) \\ y \leqq q & (a<0) \end{cases}$
6. $y=ax^2$ $(a \neq 0)$ のグラフを

　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

補 2次関数のグラフは放物線で，x^2 の係数 a の符号で上に凸か下に凸かの概形が決まる．
$y=ax^2$ と $y=ax^2+bx+c$ のグラフは同じ形（合同）で頂点が違うだけである．
つまり x^2 の係数が同じ2次関数のグラフは同じ形の放物線になる．
例えば $y=2x^2$，$y=2(x-1)^2+3$，$y=2x^2-x+1$，$y=2(x-1)(x-3)$
これらは x^2 の係数がすべて2で，頂点が違うだけで同じ形の放物線である．

平方完成

x の2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形にすることを

x について **平方完成**(へいほうかんせい)する という．

基本的な平方完成

$$x^2+\square\,x=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

$\times\frac{1}{2}$（半分）

2乗してひく

㊄ $x^2+6x=(x+3)^2-9$

(補) x^2 の係数は1

例題 x^2+3x を平方完成せよ．

(解) $x^2+3x=\left(\boldsymbol{x}+\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^2-\mathbf{\frac{9}{4}}$

2 次式の平方完成の方法

x の 2 次式 ax^2+bx+c は次のように平方完成できる．

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \quad \leftarrow x^2 \text{ の係数 } a \text{ で定数項以外をくくる}\\
&= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \quad \leftarrow \text{基本的な平方完成}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \quad \leftarrow \text{展開}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \leftarrow (\quad)^2 \text{ の外を整理}
\end{aligned}
$$

例

$$
\begin{aligned}
2x^2+12x+5 &= 2(x^2+6x)+5\\
&= 2\left\{(x+3)^2-9\right\}+5\\
&= 2(x+3)^2-18+5\\
&= 2(x+3)^2-13
\end{aligned}
$$

例題 $2x^2+6x+1$ を平方完成せよ．

解

$$
\begin{aligned}
2x^2+6x+1 &= 2(x^2+3x)+1\\
&= 2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+1\\
&= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1\\
&= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

平方完成と放物線の頂点の座標

$a \neq 0$ とする.

$\boxed{1}$ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点の座標は $(p,\ q)$

$\boxed{2}$ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ のグラフの

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

例 $y = 2x^2 + 12x + 5 = 2(x+3)^2 - 13$ の頂点の座標は $(-3,\ -13)$

$\boxed{\text{例題}}$ $y = 2x^2 + 6x + 1$ の頂点の座標を求めよ.

解 $y = 2x^2 + 6x + 1 = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{2}$

頂点の座標は $\left(-\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ -\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}\right)$

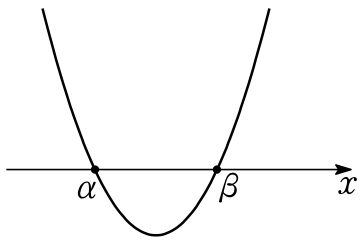
因数分解と2次関数のグラフ

座標平面で

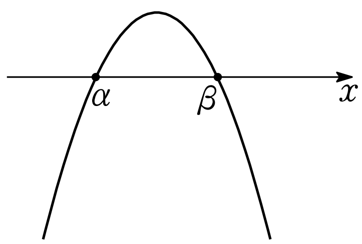
2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a \neq 0)$

のグラフは **放物線** であり $\alpha<\beta$ とすると次のような概形になる.

〔$a>0$ のとき〕



〔$a<0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ x 軸上の2点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通る.

$\boxed{2}$ 軸の方程式は $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} \text{下に凸} & (a>0) \\ \text{上に凸} & (a<0) \end{cases}$

㊟補 $\alpha=\beta$ ならば $y=a(x-\alpha)^2$

2 次関数の式の形

x の 2 次関数は次のような式で表される．

ただし a，b，c，p，q，α，β はすべて実数，$a \neq 0$ とする．

$\boxed{1}$ $y = ax^2 + bx + c$

$\boxed{2}$ $y = a(x-p)^2 + q$ ← 頂点の座標が (p, q)，軸の方程式が $x = p$ とわかる形

$\boxed{3}$ $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ←x 軸と $(\alpha, 0)$，$(\beta, 0)$ で共有点をもつことがわかる形

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ のグラフの概形はすべて $y = ax^2$ と同じ形の放物線である．

例 $\boxed{1}$ $y = 2x^2 - 8x + 6$

$\boxed{2}$ $y = 2(x-2)^2 - 2$

$\boxed{3}$ $y = 2(x-1)(x-3)$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ はいずれも $y = 2x^2$ と同じ形の放物線である．

平行移動

図形上の各点を，同じ方向に一定の距離だけ動かすことを **平行移動**（へいこういどう）という．
図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない．

座標平面における平行移動

座標平面において

1　点 (a, b) を

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動すると

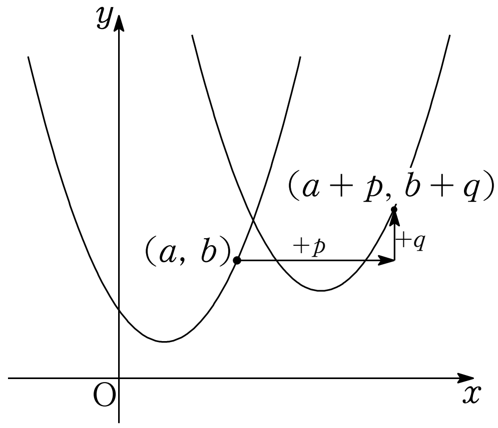
点 $(a+p, b+q)$

2　$y=f(x)$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動すると

$$y-q=f(x-p) \iff y=f(x-p)+q$$



考　2 点 (x, y) を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した点を

点 (X, Y) とすると

$\begin{cases} x+p=X \\ y+q=Y \end{cases}$　すなわち　$\begin{cases} x=X-p \\ y=Y-q \end{cases}$

の関係が成り立つことから

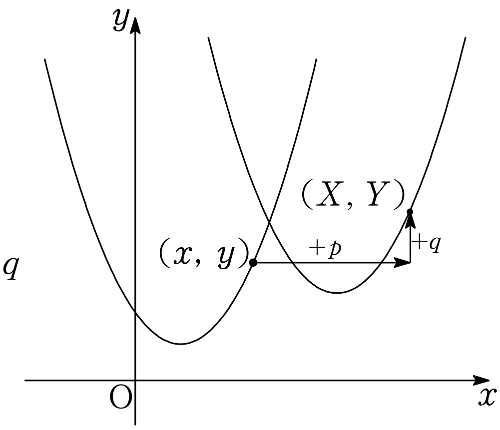
$y=f(x) \iff Y-q=f(X-p)$

すなわち，点 (x, y) を x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動した点の集合は

$\{(X, Y) \mid Y-q=f(X-p)\}$

$=\{(x, y) \mid y-q=f(x-p)\}$



要

座標平面で

x を $x-p$ かつ y を $y-q$ に置きかえると

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動される．

補　点 $(x-p, y-q)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると点 (x, y) となる．

例題　直線 $y=3x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式を求めよ．

解　$y=3x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると　$y=3(x-2)+1$

よって　$\boldsymbol{y=3x-5}$

直線に関する対称移動

図形上の各点をある直線に関して対称な点にうつすことを

ある直線に関する **対称移動** または **折り返し** という.

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない.

座標平面における x 軸に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\, t)$ を

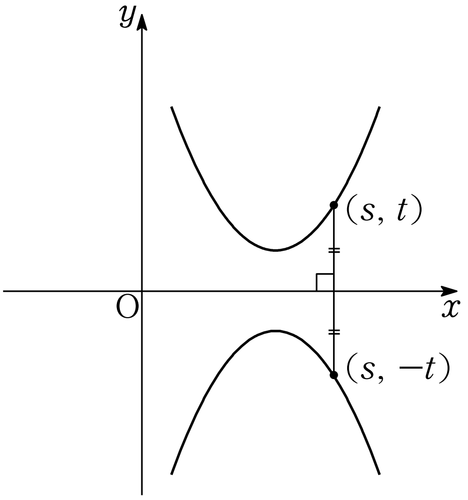
x 軸に関して対称移動すると

点 $(s,\, -t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動すると

$-y=f(x) \iff y=-f(x)$



㊢ $\boxed{2}$ 点 $(x,\, y)$ を x 軸に関して対称移動した点を点 $(X,\, Y)$ とすると

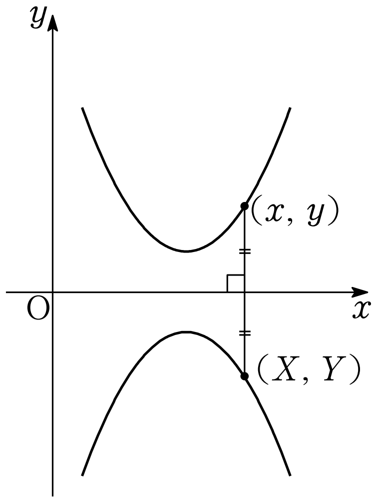
$$\begin{cases} x=X \\ y=-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff -Y=f(X)$$

すなわち，点 $(x,\, y)$ を x 軸に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\, Y) \mid -Y=f(X)\}=\{(x,\, y) \mid -y=f(x)\}$$



要

座標平面で

y を $-y$ に置きかえると x 軸に関して対称移動される．

補 点 $(x,\, -y)$ を x 軸に関して対称移動すると点 $(x,\, y)$ となる．

$\boxed{\text{例題}}$ 直線 $y=3x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ．

解 $y=3x$ のグラフを x 軸に関して対称移動すると $\boldsymbol{y=-3x}$

座標平面における y 軸に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

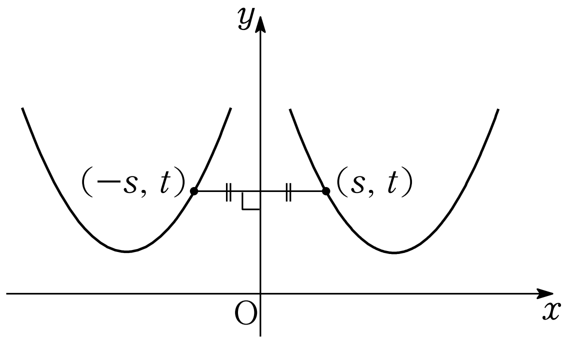
y 軸に関して対称移動すると

点 $(-s,\ t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ のグラフを

y 軸に関して対称移動すると

$y=f(-x)$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を y 軸に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} x=-X \\ y=Y \end{cases}$$

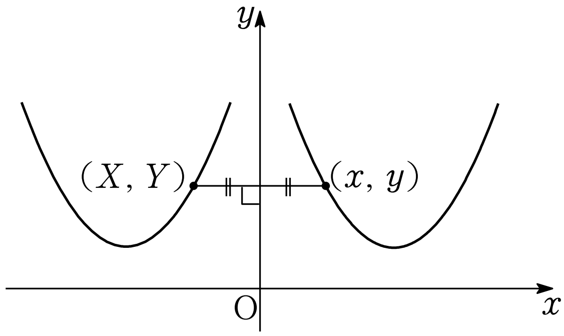
の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff Y=f(-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,Y=f(-X)\}=\{(x,\ y)\,|\,y=f(-x)\}$$



要

座標平面で

x を $-x$ に置きえると y 軸に関して対称移動される．

補 点 $(-x,\ y)$ を y 軸に関して対称移動すると点 $(x,\ y)$ となる．

$\boxed{\text{例題}}$ 直線 $y=3x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ．

解 $y=3x$ のグラフを y 軸に関して対称移動すると $y=3(-x)$

よって $\boldsymbol{y=-3x}$

★座標平面における x 軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\ t)$ を

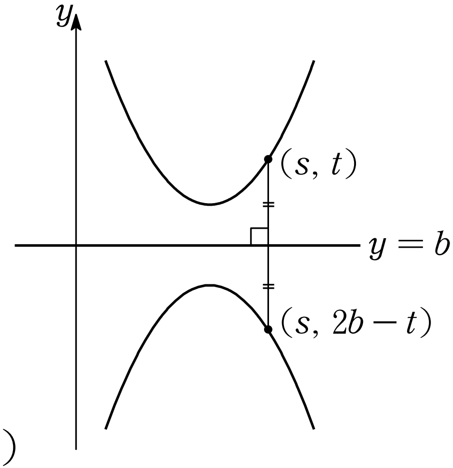
直線 $y=b$ に関して対称移動すると

点 $(s,\ 2b-t)$

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ のグラフを

直線 $y=b$ に関して対称移動すると

$$2b-y=f(x) \iff y=2b-f(x)$$



㊟ $\boxed{2}$ 点 $(x,\ y)$ を直線 $y=b$ に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

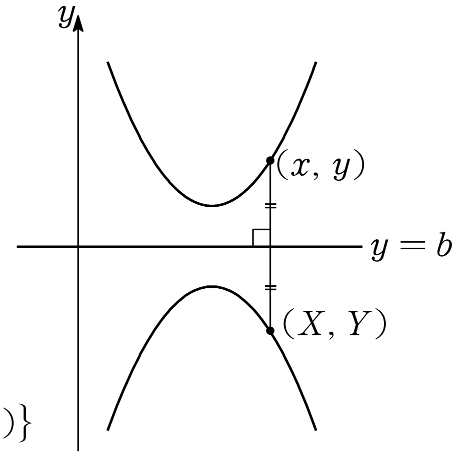
$$\begin{cases} x=X \\ \dfrac{y+Y}{2}=b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=Y \\ y=2b-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff 2b-Y=f(X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を直線 $y=b$ に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\,|\,2b-Y=f(X)\}=\{(x,\ y)\,|\,2b-y=f(x)\}$$



要

座標平面で

y を $2b-y$ に置きかえると直線 $y=b$ に関して対称移動される．

補 $b=0$ のときは x 軸対称である．

例題 直線 $y=3x$ のグラフを直線 $y=1$ に関して対称移動したグラフの式を求めよ．

解 $y=3x$ のグラフを直線 $y=1$ に関して対称移動すると $2-y=3x$

よって $\boldsymbol{y=-3x+2}$

★座標平面における y 軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\, t)$ を

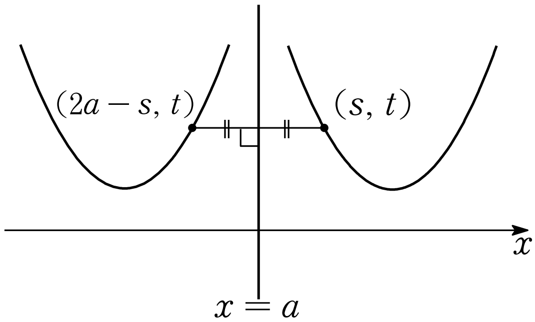
直線 $x = a$ に関して対称移動すると

点 $(2a - s,\, t)$

$\boxed{2}$ $y = f(x)$ のグラフを

直線 $x = a$ に関して対称移動すると

$y = f(2a - x)$



考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\, y)$ を直線 $x = a$ に関して対称移動した点を

点 $(X,\, Y)$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = a \\ y = Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = 2a - X \\ y = Y \end{cases}$$

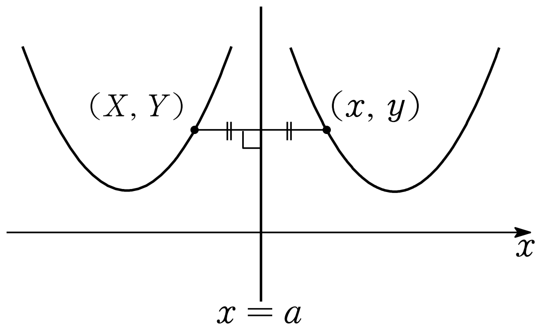
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff Y = f(2a - X)$$

すなわち，点 $(x,\, y)$ を x 軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X,\, Y)\,|\,Y = f(2a - X)\{ = \{(x,\, y)\,|\,y = f(2a - x)\}$$



要

座標平面で

x を $2a - x$ に置きかえると 直線 $x = a$ に関して対称移動される.

補 $a = 0$ とすると y 軸対称である.

例題　直線 $y = 3x$ のグラフを直線 $x = 1$ に関して対称移動したグラフの式を求めよ.

解 $y = 3x$ のグラフを直線 $x = 1$ に関して対称移動すると $y = 3(2 - x)$

よって $\boldsymbol{y = -3x + 6}$

点に関する対称移動

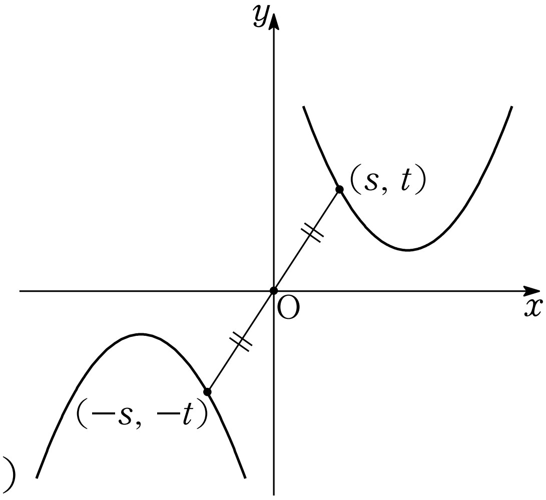
図形上の各点をある点に関して対称な点にうつすことを

ある点に関する **対称移動**（たいしょういどう） または **折り返し**（おりかえし） という.

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない.

座標平面における原点に関する対称移動

座標平面において



1 点 $(s,\ t)$ を

原点に関して対称移動すると

点 $(-s,\ -t)$

2 $y=f(x)$ のグラフを

原点に関して対称移動すると

$$-y=f(-x) \iff y=-f(-x)$$

考 2 点 $(x,\ y)$ を原点に関して対称移動した点を

点 $(X,\ Y)$ とすると

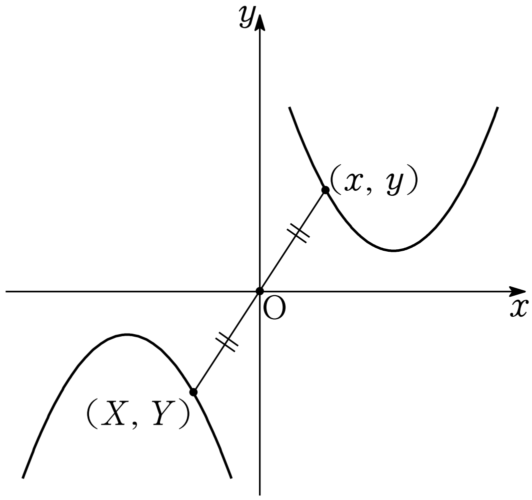
$$\begin{cases} x=-X \\ y=-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff -Y=f(-X)$$

すなわち，点 $(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\ Y)\mid -Y=f(-X)\}$$
$$=\{(x,\ y)\mid -y=f(-x)\}$$



要

座標平面で

x を $-x$ かつ y を $-y$ に置きかえると原点に関して対称移動される．

補 点 $(-x,\ -y)$ を原点に関して対称移動すると点 $(x,\ y)$ となる．

例題 直線 $y=3x+2$ のグラフを原点に関して対称移動したグラフの式を求めよ．

解 $y=3x+2$ のグラフを原点に関して対称移動すると $-y=3(-x)+2$

よって $\boldsymbol{y=3x-2}$

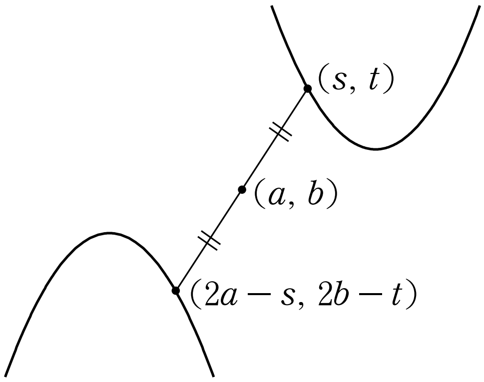
★座標平面における点に関する対称移動

座標平面において

$\boxed{1}$ 点 $(s,\,t)$ を

点 $(a,\,b)$ に関して対称移動すると

点 $(2a-s,\,2b-t)$



$\boxed{2}$ $y=f(x)$ のグラフを

点 $(a,\,b)$ に関して対称移動すると

$$2b-y=f(2a-x) \iff y=2b-f(2a-x)$$

考 $\boxed{2}$ 点 $(x,\,y)$ を点 $(a,\,b)$ に関して対称移動した点を

点 $(X,\,Y)$ とすると

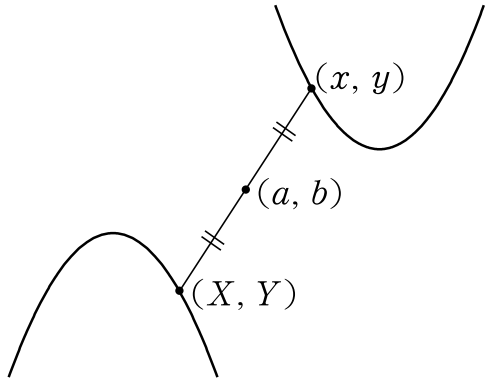
$$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=a \\ \dfrac{y+Y}{2}=b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x=2a-X \\ y=2b-Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y=f(x) \iff 2b-Y=f(2a-X)$$

すなわち，点 $(x,\,y)$ を点 $(a,\,b)$ に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X,\,Y)\,|\,2b-Y=f(2a-X)\}=\{(x,\,y)\,|\,2b-y=f(2a-x)\}$$



要

座標平面で x を $2a-x$ かつ y を $2b-y$ に置きかえると

点 $(a,\,b)$ に関して対称移動される．

補 $(a,\,b)=(0,\,0)$ とすると原点に関しての対称移動となる．

$\boxed{\text{例題}}$ 直線 $y=3x$ のグラフを点 $(1,\,2)$ に関して対称移動したグラフの式を求めよ．

解 $y=3x$ のグラフを点 $(1,\,2)$ に関して対称移動すると $4-y=3(2-x)$

よって $\boldsymbol{y=3x-2}$

2次関数のグラフの平行移動

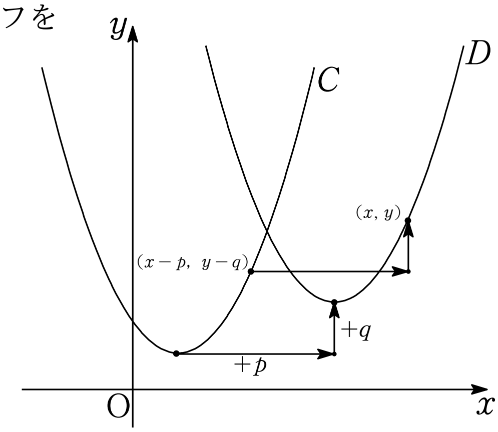
座標平面において

放物線 $C: y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ のグラフを

x 軸方向に p

y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線を D とすると



$\boxed{1}$ 2つの放物線 C と D は $y=ax^2$ と同じ形

$\boxed{2}$ C の頂点は D の頂点に移される.

$\boxed{3}$ C で x を $x-p$, y を $y-q$ と置きかえると D の式になる.

つまり $D: y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$

例 放物線 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式は

$y-1=2(x-2)^2$ すなわち $y=2(x-2)^2+1$

例題 放物線 $y=2x^2+3x+1$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式を求めよ.

解 $y=2x^2+3x+1$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式は

$y-1=2(x-2)^2+3(x-2)+1$

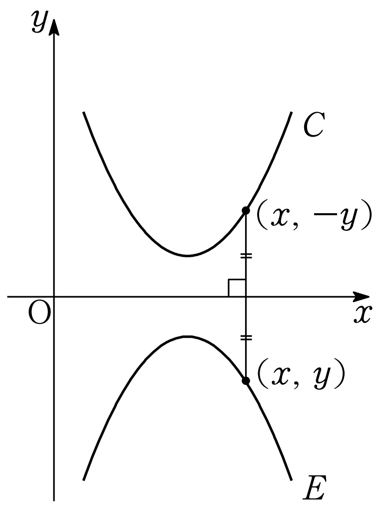
よって $\boldsymbol{y=2x^2-5x+4}$

2 次関数のグラフの x 軸に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動した放物線を E とすると



$\boxed{1}$ E は $y = -ax^2$ と同じ形

$\boxed{2}$ C の頂点は E の頂点に移される.

$\boxed{3}$ C で y を $-y$ と置きかえると E の式になる.

つまり $E : -y = ax^2 + bx + c$

すなわち $E : y = -ax^2 - bx - c$

例 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの式は

$-y = 2x^2 - 4x + 5$ すなわち $y = -2x^2 + 4x - 5$

例題 放物線 $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを x 軸に関して対称移動したブラフの式を求めよ.

解 $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの式は

$-y = 2x^2 + 3x + 1$

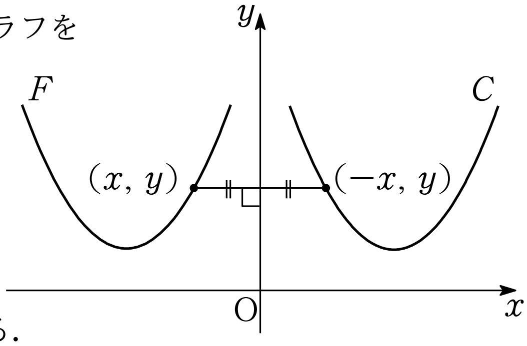
よって $\boldsymbol{y = -2x^2 - 3x - 1}$

2 次関数のグラフの y 軸に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ のグラフを

y 軸に関して対称移動した放物線を F とすると



[1] 2 つの放物線 C と F は $y = ax^2$ と同じ形

[2] C の頂点は F の頂点に移される.

[3] C で x を $-x$ と置きかえると F の式になる.

つまり $F : y = a(-x)^2 + b(-x) + c$

すなわち $F : y = ax^2 - bx + c$

例 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフを y 軸に関して対称移動したグラフの式は

$y = 2(-x)^2 - 4(-x) + 5$ すなわち $y = 2x^2 + 4x + 5$

例題 放物線 $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを y 軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ.

解 $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを y 軸に関して対称移動したグラフの式は

$y = 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$

よって $\boldsymbol{y = 2x^2 - 3x + 1}$

2 次関数のグラフの原点に関する対称移動

座標平面において

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ を

原点 O に関して対称移動した放物線を G とすると

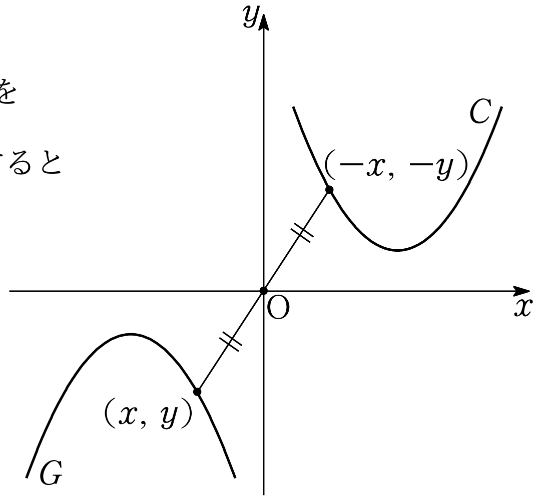
$\boxed{1}$ G は $y = -ax^2$ と同じ形

$\boxed{2}$ C の頂点は G の頂点に移される.

$\boxed{3}$ C で x を $-x$ かつ y を $-y$ と置きかえると G の式になる.

つまり $G : -y = a(-x)^2 + b(-x) + c$

すなわち $G : y = -ax^2 + bx - c$



例 $y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線の方程式は

$-y = 2(-x)^2 - 4(-x) + 5$ すなわち $y = -2x^2 - 4x - 5$

例題　$y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線の式を求めよ.

解 $y = 2x^2 + 3x + 1$ を y 軸に関して対称移動した放物線の式は

$y = 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$

よって $\boldsymbol{y = 2x^2 - 3x + 1}$

関数の最大値・最小値

$\boxed{1}$ x の関数 $y=f(x)$ の 最大値（さいだいち）とは

$y \leqq M$ かつ $y=M$ となる x が定義域内にあるときの M

$\boxed{2}$ x の関数 $y=f(x)$ の 最小値（さいしょうち）とは

$y \geqq m$ かつ $y=m$ となる x が定義域内にあるときの m

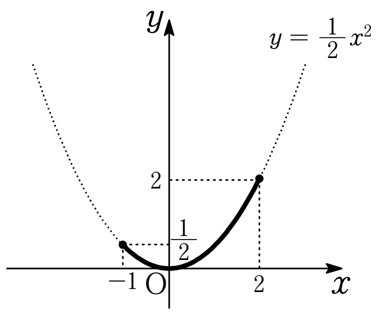
㊄ 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ について

グラフは頂点の座標 $(0,\ 0)$，下に凸

右のグラフより　$0 \leqq y \leqq 2$

よって，最大値は $\mathbf{2}\ (x=2)$

最小値は $\mathbf{0}\ (x=0)$



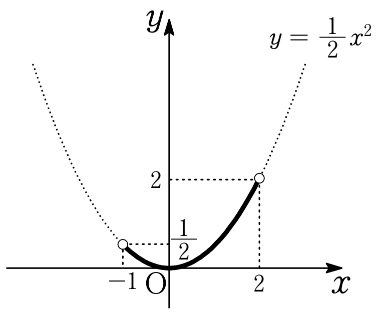
㊄ 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (-1 < x < 2)$ について

グラフは頂点の座標 $(0,\ 0)$，下に凸

右のグラフより　$0 \leqq y < 2$

よって，最大値は **なし**

最小値は $\mathbf{0}\ (x=0)$



㊗ 2 次関数 $y=f(x)$ の最大値，最小値は定義域に注意して値域をみるとよいが，
頂点の座標，軸の位置，上に凸か下に凸か調べ，グラフをイメージするとわかる．
特に定義域内に頂点があれば，その点で最大値または最小値をとる．

Ⓖ 下に凸の 2 次関数の $a \leqq x \leqq b$ における最大値・最小値

Ⓖ 上に凸の 2 次関数の $a \leqq x \leqq b$ における最大値・最小値

$\boxed{\text{例題}}$ 関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

㊫ **最大値は 0 $(\boldsymbol{x=0})$，最小値は $-\mathbf{2}$ $(\boldsymbol{x=2})$**

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \ (a,\ b,\ c \text{ は実数},\ a \neq 0)$$

の形で表される x の方程式を x についての **2次方程式**（じほうていしき）という．

2 次方程式を満たす x の値を 2 次方程式の **解**（かい）といい，

2 次方程式の解をすべて求めることを 2 次方程式を **解く**（と）という．

2 次方程式の解の個数は **高々2個**（たかだか）である．

とくに 解がただ 1 つとなるとき，その解を **重解**（じゅうかい）または **重複解**（ちょうふくかい）という．

㊓「高々 2 個」とは「多くとも 2 個」「2 個以下」という意味である．

㊟ 代数学では解を根（こん）といい，重解は重根という．
解は方程式を満たす値の集合の要素と解釈できる．

因数分解された形の2次方程式の解

$a \neq 0$ とする.

$\boxed{1}$ x の2次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解は $x=\alpha,\ \beta$

$\boxed{2}$ x の2次方程式 $a(x-\alpha)^2=0$ の解は $x=\alpha$

$\boxed{1}$ で $\alpha=\beta$ となる場合が $\boxed{2}$ である.

$\boxed{2}$ のようなただ1つの解を **重解** という.

例 $\boxed{1}$ 2次方程式 $2(x-1)(x-2)=0$ の解は $x=1,\ 2$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $2(x-1)^2=0$ の解は $x=1$（重解）

例題　x の2次方程式 $x^2+5x-6=0$ を解け.

解 $(x+6)(x-1)=0$

よって $\boldsymbol{x=-6,\ 1}$

□平方の形と2次方程式の解

k を実数とする．

$\boxed{1}$ X の2次方程式 $X^2=k$ の解は $X=\pm\sqrt{k}$

$\boxed{2}$ x の2次方程式 $(x-\alpha)^2=k$ の解は

$x-\alpha=\pm\sqrt{k}$ すなわち $x=\alpha\pm\sqrt{k}$

考 $\boxed{2}$ 2次方程式 $(x-\alpha)^2=k$ で $x-\alpha=X$ とおくと $X^2=k$ となり $\boxed{1}$ の形になる．

$x-\alpha=\pm\sqrt{k}$ すなわち $x=\alpha\pm\sqrt{k}$

例 $\boxed{1}$ 2次方程式 $x^2=2$ の解は $x=\pm\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $(x-1)^2=2$ の解は $x-1=\pm\sqrt{2}$ すなわち $x=1\pm\sqrt{2}$

例題　x の2次方程式 $2(x-3)^2=10$ を解け．

解 $(x-3)^2=5$ すなわち $x-3=\pm\sqrt{5}$

よって $\boldsymbol{x=3\pm\sqrt{5}}$

□2次方程式の解の公式Ⅰ

a，b，c は実数，$a \neq 0$，$b^2-4ac \geqq 0$ とする．

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

㊔ $ax^2+bx+c=0$ の両辺に $4a$ をかけて　$4a^2x^2+4abx+4ac=0$

両辺に b^2-4ac をたして　$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

左辺を平方の式にして　$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

平方根を考えて　$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

よって　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2次方程式の解は高々2個なので，これが解となる．

㊕ 2次方程式 $x^2+3x-1=0$ の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

（$a=1$, $b=3$, $c=-1$ として公式にあてはめている）

例題　x の2次方程式 $2x^2+5x+1=0$ を解け．

㊎ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}}$

☆2 次方程式の解の公式 II

a，b，c は実数，$a \neq 0$，$b'^2 - ac \geqq 0$ とする．

x の 2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

(考) x の 2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $\boxed{\text{2 次方程式の解の公式 I}}$ で $b = 2b'$ として求めると

$$\begin{aligned} x &= \frac{2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

(補) x の係数が 2 でくくれるときに有効な公式である．

(例) 2 次方程式 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

（$a = 3$, $b' = 2$, $c = -1$ として公式にあてはめている）

例題 x の 2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ を解け．

(解) $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 1}}{1}$

よって $\boldsymbol{x = 2 \pm \sqrt{3}}$

平行の形の2次方程式の実数解の個数

k を実数とする.

x の2次方程式 $x^2=k$ の解は $x=\pm\sqrt{k}$

次のように k の値で実数解の個数がわかる.

1 $k>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

2 $k=0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ

3 $k<0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $k \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

補 3 $D<0$ ならば実数解をもたないが，異なる2つの共役な虚数解をもつ.（数学 II）

考 1 2次方程式 $x^2=k$ $(k>0)$ の異なる2つの実数解は $x=-\sqrt{k}, \sqrt{k}$

2 2次方程式 $x^2=0$ のただ1つの実数解（重解）は $x=0$

3 2次方程式 $x^2=k$ $(k<0)$ の実数解はない.

ただし $x=\pm\sqrt{-k}\,i$ の共役な虚数解をもつ（数学 II）

2次方程式の判別式

a, b, c は実数，$a \neq 0$ とする.

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について

$$b^2-4ac$$

を **判別式**（はんべつしき）といい D で表すことがよくある.

話 代数学では「判別式」は多項式 ax^2+bx+c から定義される.

高校数学では2次方程式でしか判別式を考えないので，教科書は上のように

$\boxed{\text{2次方程式の解の公式 I}}$ の根号の中の値を判別式としている.

2 次方程式の実数解の個数 I

a，b，c は実数，$a \neq 0$ とする．

x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$D = b^2 - 4ac$ として $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

次のように D の値で実数解の個数がわかる．

$\boxed{1}$ $D > 0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$\boxed{2}$ $D = 0 \iff$ ただ 1 つの実数解（重解）をもつ

$\boxed{3}$ $D < 0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

補 $\boxed{3}$ $D < 0$ ならば実数解をもたないが，異なる 2 つの共役な虚数解をもつ．（数学 II）

考 解の公式の根号の中の符号で実数解の個数が決まる．

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(D > 0)$ の異なる 2 つの実数解は

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(D = 0)$ のただ 1 つの実数解（重解）は

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$\boxed{3}$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(D < 0)$ の実数解はない．

ただし $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-D}\, i}{2a}$ の共役な虚数解をもつ

☆2次方程式の実数解の個数 II

a, b, c は実数, $a \neq 0$ とする.

x の2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ について

$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ として $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$

次のように $\dfrac{D}{4}$ の値で実数解の個数がわかる.

$\boxed{1}$ $\dfrac{D}{4} > 0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$\boxed{2}$ $\dfrac{D}{4} = 0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ

$\boxed{3}$ $\dfrac{D}{4} < 0 \iff$ 実数解をもたない

とくに $\dfrac{D}{4} \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ

㊫ $\boxed{\text{2次方程式の実数解の個数 I}}$ と同様である.

$D = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$ すなわち $\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$

$\boxed{1}$ 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0 \left(\dfrac{D}{4} > 0\right)$ の異なる2つの実数解は

$$x = \frac{-b' - \sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a},\ \frac{-b' + \sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0 \left(\dfrac{D}{4} = 0\right)$ のただ1つの実数解（重解）は

$$x = \frac{-b'}{a}$$

$\boxed{3}$ 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0 \left(\dfrac{D}{4} < 0\right)$ の実数解はない.

ただし $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{-\dfrac{D}{4}}\,i}{a}$ の共役な虚数解をもつ

☆2次方程式の実数解の差

a，b，c は実数で $a>0$ とする．

$\boxed{1}$ x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{D}}{a} \quad \text{ただし}\ D=b^2-4ac\ (\geqq 0)$$

$\boxed{2}$ x の2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a} \quad \text{ただし}\ \frac{D}{4}=b'^2-ac\ (\geqq 0)$$

考 $\boxed{1}$ x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$a>0$ より $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} \leqq \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ であるから

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ \beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

よって

$$\beta-\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\sqrt{D}}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{a}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ より $\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{D}}{a}=\dfrac{\sqrt{4\cdot\dfrac{D}{4}}}{a}=\dfrac{2\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$

例 2次方程式 $3x^2-4x-1=0$ の解の差は

$$\frac{\sqrt{2^2-3\cdot(-1)}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

補 $\boxed{1}$ $a>0$ の条件を $a\neq 0$ とすると $|\beta-\alpha|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ $(D\geqq 0)$

$\boxed{2}$ $a>0$ の条件を $a\neq 0$ とすると $|\beta-\alpha|=\dfrac{2\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{|a|}$ $\left(\dfrac{D}{4}\geqq 0\right)$

☆2 次方程式の解との因数分解

a，b，c は実数 とする．

x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 $x=\alpha,\ \beta$ をもつならば

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

例 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解が $x=1,\ 5$ ならば

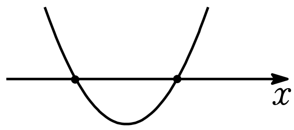
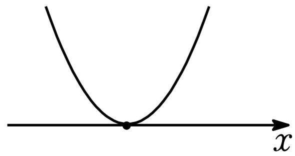
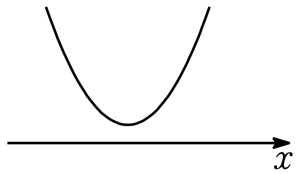
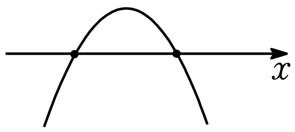
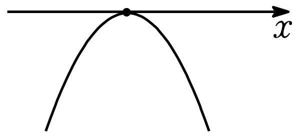
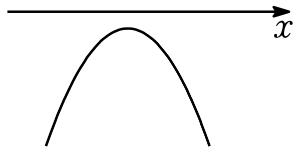
$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= (x-1)(x-5) \\ &= x^2-6x+5 \end{aligned}$$

2次関数のグラフと x 軸の位置関係

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \\ y = 0 \ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係は $D = b^2 - 4ac$ として 次の表のようになる．

D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
位置関係	異なる2点で交わる	1点で接する	共有点をもたない
$a > 0$ （下に凸）			
$a < 0$ （上に凸）			

考 共有点の x 座標は x についての2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解であるから，実数解の個数から位置関係は決まる．

補 下に凸，上に凸か，放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ の頂点の y 座標の符号からも位置関係はわかる．

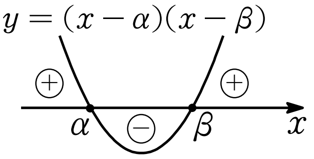
因数分解と2次方程式・2次不等式の解

$\alpha < \beta$ とする．

$\boxed{1}$ $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \iff x=\alpha\,,\ \beta$

$\boxed{2}$ $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \iff \alpha < x < \beta$

$\boxed{3}$ $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \iff x < \alpha,\ \beta < x$

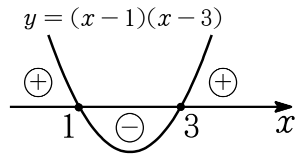


注 グラフにある ⊕ は y の符号が正，⊖ は y の符号が負であることを表す．

例 $\boxed{1}$ $(x-1)(x-3)=0 \iff x=1,\ 3$

$\boxed{2}$ $(x-1)(x-3)<0 \iff 1<x<3$

$\boxed{3}$ $(x-1)(x-3)>0 \iff x<1,\ 3<x$



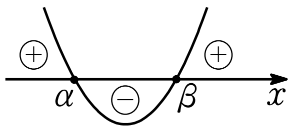
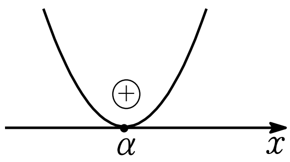
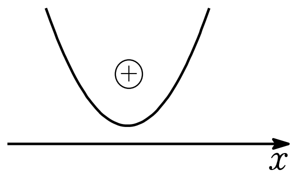
2 次方程式の実数解と 2 次不等式の解

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \\ y = 0 \ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係を考えて x の 2 次不等式を次のように解くことができる．

ただし $D = b^2 - 4ac$ とし $a > 0$，$\alpha < \beta$ とする．

D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \alpha,\ \beta$	$x = \alpha$	実数解なし
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha,\ \beta < x$	$x < \alpha,\ \alpha < x$	すべての実数 x
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数 x	すべての実数 x
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解なし

注 グラフにある ⊕ は y の符号が正，⊖ は y の符号が負であることを表す．

補 グラフをイメージすると不等式の解は求まる．