

数学 I 数と式

累乗と指数 / 指数法則 / 単項式 / 単項式の次数と係数 / 多項式と整式 / 整式と項 / 整式の次数 / 降べきの順・昇べきの順 / 展開 / 整式の乗法 / 分配法則 / 平方式の展開 / 和と差の積の展開 / 1次式の積の展開 / 3つの項の和の平方式の展開 / ☆立方式の展開 / ☆和と差の平方の展開 / ☆立方の和または差になる展開 / 因数分解 / 共通因数でくくる / 平方の差の因数分解 / 平方式への因数分解 / 2次式の因数分解 / 2次式の因数分解(たすきがけ) / ★3つの項の和の平方式への因数分解 / ★立方式への因数分解 / ★立方の和または差の因数分解 / ☆ n 乗の差の因数分解 / ★ n 乗の和の因数分解 / ★3次の因数分解公式 / 複2次式 / 複2次式の因数分解 / ☆2文字の対称式 / ☆2文字の対称式の性質 / ★3文字の対称式 / ★3文字の対称式の性質 / ★2文字の交代式 / ★2文字の交代式の性質 / 実数の性質 / 小数の表記 / 小数の分類 / 循環小数の表記 / 小数の分数表記 / 自然数と整数 / 有理数 / 無理数 / 実数 / 実数の分類 / 四則計算(四則演算) / 実数と有理数の四則計算 / 数直線 / 絶対値 / 絶対値記号をはずす変形 / 数直線上の2点間の距離 / 絶対値と等式 / 絶対値と不等式 / 絶対値の性質 / 平方根と根号 / 平方根の性質 / 平方された実数の根号 / 根号を含む式の変形 / 分母の有理化 / 基本的な分母の有理化 / ★二重根号をはずす / 整数部分と小数部分 / 整数部分と小数部分の求め方 / 近似値 / 誤差 / 有効数字 / 有名な近似値不等式 / 不等式の基本性質 / 実数の大小関係の基本性質 / 不等式と解 / 1次不等式 / 1次不等式の変形 / 連立不等式 / 3つの数の大小関係と連立不等式 / $y = |f(x)|$ のグラフ / 絶対値を含む不等式

累乗と指数

文字 a をいくつかかけたものを a の るいじょう 累乗 という。

a を n 回かけた累乗を a の n 乗といい a^n とかく。

すなわち

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}} = a^n \quad \text{または} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 個}} = a^n$$

a^n と表したとき n を しすう 指数 という。

とくに a^2 を a の へいほう 平方, a^3 を a の りっぽう 立方 という。

指数が 1 のときは $a^1 = a$ と 1 は基本的に表記しない。

① a を 3 回かけた累乗は $a \times a \times a = a^3$ または $a \cdot a \cdot a = a^3$

② $3 \times 3 = 3 \cdot 3 = 3^2$

指数法則

a, b を 0 でない実数, m, n は正の整数とするととき, 次が成り立つ.

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

⑧ 例 ① $a^2 a^3 = a^{2+3} = a^5$

② $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = (a^2)^3 = a^6$

③ $(ab)^2 = a^2 b^2$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

例題 次の計算をせよ.

(1) $a^5 a^3$ (2) $(a^5)^3$ (3) $(a^5 b)^3$ (4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⑧ 解 指数法則を用いる.

(1) $a^5 a^3 = a^{5+3} = a^8$

(2) $(a^5)^3 = a^{5 \times 3} = a^{15}$

(3) $(a^5 b)^3 = (a^5)^3 b^3 = a^{15} b^3$

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

□ 単項式

数や文字をかけたただけでつくられる式を ^{たんこうしき} 単項式 という。

⑧ 2, x^2 , $2x^2$, $5x^2y$, $5x^2yz$, … を単項式という。

□ 単項式の次数と係数

① 単項式において かけ合わせた文字の個数を その単項式の ^{じすう} 次数 という。
 ただし、0 以外の数だけの単項式の次数は 0 とし、数 0 の次数は定義しない。

② 単項式において 数の部分をその単項式の ^{けいすう} 係数 という。
 とくに 係数が 1 のときは基本的に表記しない。

③ 文字が 2 種類以上あるときは 特定の文字に着目し、
 着目しない文字は数とみなすことがある。

⑧ 単項式 $3x^2$ の次数は $x^2 = x \times x$ と文字を 2 個かけているので 2, 係数は 3

⑧ 単項式 2 の次数は 0

⑧ 単項式 $5x^2y$ の次数は $x^2y = x \times x \times y$ と文字を 3 個かけているので 3, 係数は 5

⑧ 単項式 $5x^2y$ は文字 x に着目すると $5yx^2$ と表わせて、次数は 2, 係数は $5y$

⑧ 単項式 $5x^2y$ は文字 y に着目すると次数は 1, 係数は $5x^2$

例題

- (1) 単項式 $-5x^2$ の次数と係数をそれぞれ求めよ。
- (2) 単項式 $56ax^3$ の次数と係数をそれぞれ求めよ。
- (3) 単項式 $56ax^3$ を文字 x に着目するとき、次数と係数をそれぞれ求めよ。

⑧ 解

(1) 単項式 $-5x^2$ の次数は 2 と係数は -5

(2) 単項式 $56ax^3$ の次数は 4 と係数は 56

(3) 単項式 $56ax^3$ を文字 x に着目するとき、次数は 3 と係数は $56a$

多項式と整式

単項式の和として表される式を^{たこうしき}多項式という。

単項式と多項式を合わせて^{せいしき}整式という。

単項式を項が1つの多項式として、多項式と整式を同じ意味で用いる。

- ① 例 3つの単項式 x^2 , $3x$, 2 の和として表される式 $x^2 + 3x + 2$ は多項式である。
- ② 例 3つの単項式 x^2 , $-3x$, -2 の和として表される式 $x^2 + (-3x) + (-2) = x^2 - 3x - 2$ は多項式である。
単項式 x^2 , $3x$ や多項式 $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 3x - 2$ は整式である。
- ③ 補 x^2 は単項式であり、(多項式ではないとする場合もあるようだが) 多項式でもあるとする。

整式の項

整式について

- ① 和で分けられた単項式を整式の^{こう}項という。
- ② 文字を含まない項を整式の^{ていすうこう}定数項という。
- ③ 文字の部分が同じである項を^{どうるいこう}同類項という。

同類項は係数の和を計算して1つの項にまとめることができる。

- ① 例 整式 $x^2 + 3x + 2$ の項は x^2 と $3x$ と 2 で、定数項は 2 。
- ② 例 整式 $x^2 + 2x + 3 + 4x^2$ の同類項は x^2 と $4x^2$
 $x^2 + 4x^2 = (1 + 4)x^2 = 5x^2$ と計算して $\underline{x^2} + 2x + 3 + \underline{4x^2} = \underline{5x^2} + 2x + 3$

例題 次の整式の同類項をまとめ、整理せよ。

- (1) $3x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 5x + 2$
- (2) $4a^2 + 3ab + 2b^2 - 3a^2 - 2ab + b^2$

解

- (1) $3x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 5x + 2 = (3 - 2)x^2 + (2 - 5)x + (-1 + 2) = x^2 - 3x + 1$
- (2) $4a^2 + 3ab + 2b^2 - 3a^2 - 2ab + b^2 = (4 - 3)a^2 + (3 - 2)ab + (2 + 1)b^2 = a^2 + ab + 3b^2$

整式の次数

同類項をまとめて整理した整式において

最も次数の高い項の次数をこの整式の **次数** という。

とくに **次数が n の整式を n 次式** という。

① 例 整式 $5x^2 + 2x + 3$ は最も次数の高い項が $5x^2$ なので、次数は **2** で **2 次式**

② 例 整式 $5x^2y + 3xy^3 + 2y^2$ について

最も次数の高い項が $3xy^3$ なので、次数は **4** で **4 次式**

また、文字 x に着目する場合は $5yx^2 + 3y^3x + 2y^2$

最も次数の高い項が $5yx^2$ なので、次数は **2** で **x の 2 次式**

降べきの順・昇べきの順

整式をある文字に着目して

① 項の次数が低くなる順に整理することを **降べきの順** に整理するという。

② 項の次数が高くなる順に整理することを **昇べきの順** に整理するという。

① 例 整式 $2x + x^3 + 3x^2 + 1$ を文字 x に着目して

① 降べきの順に整理すると $x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

② 昇べきの順に整理すると $1 + 2x + 3x^2 + x^3$

② 補 整式は降べきの順にして考えることが多い。

例題 次の整式を [] の文字について降べきの順に整理せよ。また、[] の文字については何次式になるか。

(1) $3x^3 + 2x^2 + x + 1 - x^3 + x^2 + x$ [x]

(2) $a^2 + 3ab - 2b^2 - 3a - b + 2$ [a]

① 解

(1) $3x^3 + 2x^2 + x + 1 - x^3 + x^2 = (1 - 1)x^3 + (2 + 1)x^2 + x + 1 = 3x^2 + x + 1$
 よって、 x について **2 次式**

(2) $a^2 + 3ab - 2b^2 + 2a - b + 2 = a^2 + (3b + 2)a - 2b^2 - b + 2$
 よって、 a について **2 次式**

□展開

いくつかの整式の積の形をした式において

積を計算して1つの整式に表すことをその式を^{てんかい}展開するという。

□分配法則

① $a(x + y) = ax + ay$

② $(x + y)a = ax + ay$

③ $a(x + y + z) = ax + ay + az$

④ $(x + y + z)a = ax + ay + az$

⑧ ① $3(x + y) = 3x + 3y$

② $(x + y)z = xz + yz$

③ $3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$

④ $(x + y + z)w = xw + yw + zw$

□整式の乗法

① $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$

② $(a + b + c)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz + cx + cy + cz$

⑧ ① $(a + 3)(x + 2) = ax + 2a + 3x + 6$

② $(a + b + 1)(x + y + 2) = ax + ay + 2a + bx + by + 2b + x + y + 2$

例題 次の式を展開せよ。

(1) $3(x + y)$

(2) $(x + 2)(3y + 4z)$

解

(1) $3(x + y) = 3x + 3y$

(2) $(x + 2)(3y + 4z) = 3xy + 4xz + 6y + 8z$

□ 平方式の展開

① $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

② $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

⑧ ① $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

② $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

⑨ ① で b を $-b$ とすることを考えて

$$(a - b)^2 = \{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

⑩ ① $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

② $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

□ 和と差の積の展開

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

⑧ $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

⑨ $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

例題 次の式を展開せよ.

(1) $(2x - 3y)^2$

(2) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

解

(1) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(2) $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

□ 1 次式の積の展開

$$\boxed{1} \quad (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$\boxed{2} \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd \quad (ac \neq 0)$$

$$\textcircled{\text{考}} \quad \boxed{1} \quad (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$\boxed{2} \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad \boxed{1} \quad (x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$$

$$\boxed{2} \quad (2x + 3)(4x + 5) = 2 \cdot 4x^2 + (2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)x + 3 \cdot 5 = 8x^2 + 22x + 15$$

例題 次の式を展開せよ.

$$(1) \quad (x + 7)(x - 1)$$

$$(2) \quad (5x + 4)(3x + 2)$$

解

$$(1) \quad (x + 7)(x - 1) = x^2 + (7 - 1)x + 7 \cdot (-1) = \mathbf{x^2 + 6x - 7}$$

$$(2) \quad (5x + 4)(3x + 2) = 5 \cdot 3x^2 + (5 \cdot 2 + 4 \cdot 3)x + 4 \cdot 2 = \mathbf{15x^2 + 22x + 8}$$

3つの項の和の平方式の展開

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{考}} \quad (a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + b^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{別}} \quad (a + b + c)^2 &= \{(a + b) + c\}^2 \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{例}} \quad (x + y + 1)^2 &= x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2 \cdot y \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \end{aligned}$$

例題 次の式を展開せよ.

$$(1) \quad (x + y + 2)^2$$

$$(2) \quad (x + 3y - z)^2$$

解

$$\begin{aligned} (1) \quad (x + y + 2)^2 &= x^2 + y^2 + 2^2 + 2xy + 2 \cdot y \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot x \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x + 3y - z)^2 &= \{x + 3y + (-z)\}^2 \\ &= x^2 + (3y)^2 + (-z)^2 + 2x \cdot 3y + 2 \cdot (3y) \cdot (-z) + 2 \cdot (-z) \cdot x \\ &= x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 6yz - 2zx \end{aligned}$$

★立方式の展開

$$\boxed{1} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\boxed{2} \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

⑧ $\boxed{1} \quad (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$
 $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\boxed{2} \quad (a - b)^3 = \{a + (-b)\}^3$
 $= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \quad (\because \boxed{1})$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

⑨ $\boxed{1} \quad (x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$\boxed{2} \quad (x - 2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

例題 次の式を展開せよ.

(1) $(x + 1)^3$

(2) $(x - 2y)^3$

解

(1) $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $(x - 2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

☆和と差の平方の展開公式

$$\boxed{1} \quad (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\boxed{2} \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

⑧ 左辺を展開すると右辺になる.

$$\boxed{1} \quad (a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2(a^2 + b^2)$$

$$\boxed{2} \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$$

⑨ $\boxed{1} \quad (x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2(x^2 + 1)$

$$\boxed{2} \quad (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x$$

例題 次の式を展開せよ.

$$(1) \quad (3x + 2y)^2 + (3x - 2y)^2$$

$$(2) \quad (3x + 2y)^2 - (3x - 2y)^2$$

⑩ 解

$$(1) \quad (3x + 2y)^2 + (3x - 2y)^2 = 2\{(3x)^2 + (2y)^2\} = 2(9x^2 + 4y^2) = \mathbf{18x^2 + 8y^2}$$

$$(2) \quad (3x + 2y)^2 - (3x - 2y)^2 = 4 \cdot 3x \cdot 2y = \mathbf{24xy}$$

☆立方の和または差になる展開

$$\boxed{1} \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\boxed{2} \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

⑧ 左辺を展開すると右辺になる.

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 \\ &\quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

⑨ $\boxed{1} \quad (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1^3 = x^3 + 1$

$\boxed{2} \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) = x^3 - 2^3 = x^3 - 8$

例題 次の式を展開せよ.

(1) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

(2) $(2x - 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

解

(1) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3$

(2) $(2x - 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2) = (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3$

□ 因数分解

1 つの整式を 1 次以上の整式の積の形に表すことを

いんすうぶんかい
もとの式を **因数分解** するという。

このとき、積を作っている各式をもとの式の**因数**という。

⑧ おおざっぱ 大雑把な説明だが、「展開」の計算の逆が「因数分解」の計算である。

□ 共通因数でくくる

整式の各項に共通な因数があるとき、その因数でくくることができる。

すなわち

$$\text{① } ax + ay = a(x + y)$$

$$\text{② } ax + ay + az = a(x + y + z)$$

⑨ $\text{① } 5x + 5y = 5(x + y)$

$\text{② } 5x + 5y + 5z = 5(x + y + z)$

例題 次の式を因数分解せよ。

(1) $ab + bc$

(2) $abc - acd$

(3) $x^2 + 3x$

解

(1) $ab + bc = \mathbf{b(a + c)}$

(2) $abc - acd = \mathbf{ac(b - d)}$

(3) $x^2 + 3x = \mathbf{x(x + 3)}$

□平方の差の因数分解

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

⊙ 考 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

□平方式への因数分解

① $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

② $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

⊙ 考 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 ① $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

② $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) $9x^2 - 4y^2$

(2) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

(3) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

⊙ 解

(1) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$

(2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x + 2y)^2$

(3) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$

□ 2次式の因数分解

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

⊙ 考 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$

2次式の因数分解(たすきがけ)

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d) \quad (ac \neq 0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a & \times & b \longrightarrow bc \\ c & \times & d \longrightarrow ad \\ & & \hline & & ad + bc \end{array} \right]$$

⊙ 考 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 $10x^2 + 7x - 12 = (2x + 3)(5x - 4)$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & \times & 3 \longrightarrow 15 \\ 5 & \times & -4 \longrightarrow -8 \\ & & \hline & & -7 \end{array} \right]$$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 + 4x - 21$

(2) $5x^2 + 13x + 6$

⊙ 解

(1) $x^2 + 4x - 21 = x^2 + (7 - 3)x + 7 \cdot (-3) = (x + 7)(x - 3)$

(2) $5x^2 + 13x + 6 = (x + 2)(5x + 3)$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \longrightarrow 10 \\ 5 & \times & 3 \longrightarrow 3 \\ & & \hline & & 13 \end{array} \right]$$

★ 3つの項の和の平方式への因数分解

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$$

⑧ 右辺を展開すると左辺になる.

$$\begin{aligned} \text{⑨ } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= \underbrace{a^2 + b^2 + 2ab} + \underline{2bc + 2ca} + c^2 \\ &= \underbrace{(a + b)^2} + \underline{2(a + b)} + c^2 \\ &= \{(a + b) + c\}^2 \\ &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑩ } x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx &= x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot 3z + 2 \cdot 3z \cdot x \\ &= (x + 2y + 3z)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑪ } x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx &= \underbrace{x^2 + 4y^2 + 4xy} + \underline{6zx + 12yz} + 9z^2 \\ &= \underbrace{(x + 2y)^2} + \underline{6(x + 2y)z} + (3z)^2 \\ &= \{(x + 2y) + 3z\}^2 \\ &= (x + 2y + 3z)^2 \end{aligned}$$

例題 次の式を因数分解せよ.

$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$\begin{aligned} \text{⑫ } x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y &= x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2 \cdot y \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x \\ &= (x + y + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑬ } x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y &= \underbrace{x^2 + y^2 + 2xy} + \underline{2x + 2y} + 1 \\ &= \underbrace{(x + y)^2} + \underline{2(x + y)} + 1 \\ &= \{(x + y) + 1\}^2 \\ &= (x + y + 1)^2 \end{aligned}$$

★立方式への因数分解

$$\boxed{1} \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$\boxed{2} \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

⑧ 右辺を展開すると左辺になる.

⑨ $\boxed{1} \quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$

$\boxed{2} \quad x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

⑩ 解

(1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$

(2) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = (x - 2y)^3$

★立方の和または差の因数分解

$$\boxed{1} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\boxed{2} \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad \boxed{1} \quad x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\boxed{2} \quad x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

例題 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad x^3 + 1$$

$$(2) \quad x^3 - 64y^3$$

解

$$(1) \quad x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(2) \quad x^3 - 64y^3 = x^3 - (4y)^3 = (x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$$

☆ n 乗の差の因数分解

n を 2 以上の自然数とする.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

⊙ 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

⊙ 例 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

⊙ 例 $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

⊙ 例 $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

★ n 乗の和の因数分解

n を 3 以上の奇数とする.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

⊙ 右辺を展開すると左辺になる.

⊙ 例 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

⊙ 例 $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

⊙ 例 $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^5 - 1$

(2) $x^5 + 1$

⊙ 解

(1) $x^5 - 1 = x^5 - 1^5 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(2) $x^5 + 1 = x^5 + 1^5 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

★ 3 次の因数分解公式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

⑧ 右辺を展開すると左辺になる.

$$\begin{aligned} \text{⑧ } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \underline{(a + b)^3 - 3ab(a + b)} + c^3 - 3abc \\ &= \underline{(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b)} - 3abc \\ &= \underline{\{(a + b) + c\}\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\}} - 3ab\{(a + b) + c\} \\ &= \{(a + b) + c\}\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab\} \\ &= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ca + bc - 3ab) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑨ } x^3 + y^3 + 1 - 3xy &= x^3 + y^3 + 1^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 1 \\ &= (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - y - x) \\ &= (x + y + 1)(x^2 + y^2 - xy - x - y + 1) \end{aligned}$$

例題 次の式を因数分解せよ.

$$x^3 - y^3 - 1 + 3xy$$

解

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 1 + 3xy &= x^3 + (-y)^3 + (-1)^3 - 3x(-y)(-1) \\ &= (x - y - 1)(x^2 + y^2 + 1 + xy - y + x) \\ &= (x - y - 1)(x^2 + y^2 + xy + x - y + 1) \end{aligned}$$

複 2 次式

4 次の整式の中で奇数の次数の項を含まないものを ^{ふく}複 2 次式 という。

すなわち $ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c は定数, $a \neq 0$) の形で表される整式を複 2 次式 という。

例 $x^4 + x^2 + 1, x^4 + 4$ はいずれも複 2 次式。

複 2 次式の因数分解

複 2 次式 $ax^4 + bx^2 + c$ の因数分解は次のようにできる。

- 1 $x^2 = t$ とおき t の 2 次式 $at^2 + bt + c$ とみる
- 2 平方の差 $(x^2 + p)^2 - (qx)^2$ に変形する

例 1 $x^4 - 5t^2 + 4$ を因数分解する。

$$x^2 = t \text{ とおくと } x^4 - 5x^2 + 4 = t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$$

$$\text{すなわち } x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

2 $x^4 + x^2 + 1$ を因数分解する。

$$x^2 = t \text{ とおくと } x^4 + x^2 + 1 = t^2 + t + 1 \text{ とすぐに因数分解できない。}$$

そこで、平方の差の形を作ることを考えて

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \underbrace{x^4 + 2x^2 + 1} - \underbrace{x^2} = (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= \{(x^2 + 1) - x\}\{(x^2 + 1) + x\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

例題 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^4 - 2x^2 + 1$
- (2) $x^4 + 4$

解

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4 - 2x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 = \{(x + 1)(x - 1)\}^2 \\ &= (x - 1)^2(x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^4 + 4 &= x^4 + \underbrace{4x^2} + \underbrace{4 - 4x^2} = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2 + 2) - 2x\}\{(x^2 + 2) + 2x\} \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

☆ 2 文字の対称式

2 つの文字の整式で、その 2 つの文字を入れかえても値が変わらない式を

その 2 文字の ^{たいしょうしき}対称式 という。

とくに その 2 文字の和と積を ^{きほんたいしょうしき}基本対称式 という。

すなわち $f(x, y)$ を x と y に関する式として

$$f(x, y) = f(y, x)$$

が成り立つとき $f(x, y)$ を x と y の対称式 という。

とくに $x + y$ と xy を基本対称式 という。

① $f(x, y) = x^2 + y^2$

について

$$x^2 + y^2 = y^2 + x^2 \quad \text{すなわち} \quad f(x, y) = f(y, x)$$

が成り立つ。

つまり $x^2 + y^2$ は x と y の対称式である。

☆ 2 文字の対称式の性質

2 文字の対称式は基本対称式だけで表すことができる。

すなわち x と y の対称式は $x + y$ または xy だけで表すことができる。

① $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

② $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

例題 $x + y = 2, xy = -1$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$

(2) $x^3 + y^3$

解

(1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2(-1) = 6$

(2) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3 \cdot 2(-1) = 14$

★ 3 文字の対称式

3 つの文字の整式で

その 3 つの文字のどの 2 つの文字を入れかえても値が変わらない式を
その 3 文字の **対称式** という。

とくに その 3 文字の和と 2 文字の積の和と積を **基本対称式** という。

すなわち $f(x, y, z)$ を x と y と z に関する式として

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x, z, y) = f(y, x, z) \\ &= f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x) \end{aligned}$$

が成り立つとき $f(x, y, z)$ を x と y と z の **対称式** という。

とくに $x + y + z$ と $xy + yz + zx$ と xyz を **基本対称式** という。

① $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

について

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + z^2 + y^2 = y^2 + x^2 + z^2 = y^2 + z^2 + x^2 = z^2 + x^2 + y^2 = z^2 + y^2 + x^2$$

すなわち

$$f(x, y, z) = f(x, z, x) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$$

が成り立つ。

つまり $x^2 + y^2 + z^2$ は x と y と z の対称式である。

★ 3 文字の対称式の性質

3 文字の対称式は **基本対称式** だけで表すことができる。

すなわち x と y と z の対称式は

$x + y + z$ または $xy + yz + zx$ または xyz だけで表すことができる。

① $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

② $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz$

③ x と y と z の 3 文字の対称式は、 z を固定する (定数とみる) と、 x と y の 2 文字の対称式となる。

例題 $x + y + z = 3, xy + yz + zx = 1$ のとき、次の値を求めよ。
 $x^2 + y^2 + z^2$

④ $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 3^2 - 2 \cdot 1 = 4$

★ 2 文字の交代式

2 つの文字の整式で

その 2 つの文字を入れ替えて (-1) 倍して値が変わらない式を

その 2 文字の ^{こうたいしき}交代式 という。

すなわち $f(x, y)$ を x と y に関する式として

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

が成り立つとき $f(x, y)$ を x と y の交代式 という。

① $f(x, y) = x^3 - y^3$

について

$$x^3 - y^3 = -(y^3 - x^3) \text{ すなわち } f(x, y) = -f(y, x)$$

が成り立つ。

つまり $x^3 - y^3$ は x と y の交代式である。

② $f(x, y) = x^3 - y^3$ において $x = y$ とすると $f(x, x) = x^3 - x^3 = 0$ となる。

このように $f(x, y)$ で $x = y$ として $f(x, x) = 0$ が常に成り立つならば $f(x, y)$ は交代式だと判断できる。

★ 2 文字の交代式の性質

2 文字の交代式は (2 つの文字の差) × (対称式) と表すことができる。

すなわち x と y の交代式は $(x - y) \times (\text{対称式})$ のように表すことができる。

また x と y の交代式を 2 乗すると x と y の対称式 になる。

③ $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

交代式 $x^3 - y^3$ を 2 乗した $(x^3 - y^3)^2$ は対称式である。

④ $x - y$ を基本交代式と言いたいが、定義はされていない。

例題 $x + y = 2, xy = -1$ のとき、次の値を求めよ。

$$x - y$$

⑤ 解 $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 2^2 - 4 \cdot (-1) = 8$

よって $x - y = \pm 2\sqrt{2}$

実数の性質

実数は小数で表すことができる.

例 $3 = 3.000\dots$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{7} = 0.142357\dots$, $\sqrt{2} = 1.4142\dots$, $7 = 7.000\dots$, $\pi = 3.141\dots$

小数の表記

x を実数とするとき

$$x = a.b_1b_2b_3\dots \quad (a \text{ は整数, } b_1, b_2, b_3, \dots \text{ は } 0 \text{ 以上の } 9 \text{ 以下の整数})$$

の形で表せる.

このとき $b_1b_2b_3\dots$ を x の しょうすうてん い か 小数点以下 という.

また

b_1 を x の小数第 1 位 または $\frac{1}{10}$ の位 という.

b_2 を x の小数第 2 位 または $\frac{1}{10^2}$ の位 という.

b_3 を x の小数第 3 位 または $\frac{1}{10^3}$ の位 という.

⋮

例 $\pi = 3.14\dots$ について $14\dots$ を π の小数点以下という.
 小数第 1 位は 1, 小数第 2 位は 4 である.

例題 円周率 $\pi = 3.14159265\dots$ について小数第 5 位の数は何か.

解 円周率 $\pi = 3.14159265\dots$ について小数第 5 位の数は **9**

小数の分類

- ① 小数第何位かで終わる小数を ゆうげんしょうすう 有限小数 という.
- ② 小数部分が無限に続く小数を むげんしょうすう 無限小数 という.
- ③ 無限小数のうち
いくつかの数字の配列が繰り返される小数を じゅんかんしょうすう 循環小数 という.

- 例
- ① $\frac{321}{1000} = 0.321$ は有限小数
 - ② $\pi = 3.14\dots$ は無限小数
 - ③ $\frac{7}{33} = 0.212121\dots$ は循環小数

循環小数の表記

循環小数は繰り返しの最初と最後の数の上に点をつけて書き表わす.

$$\begin{aligned} \text{つまり } x &= a.\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返す}}\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返す}}\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返す}}\dots \\ &= a.\dot{b}_1\dot{b}_2\dots\dot{b}_n \end{aligned}$$

ただし 循環する数が 1 つだけのときは次のように点は 1 つだけでよい.

$$\begin{aligned} x &= a.\underbrace{bbb\dots}_{\text{繰り返す}} \\ &= a.\dot{b} \end{aligned}$$

- 例
- $$\frac{7}{33} = 0.212121\dots = 0.2\dot{1} \quad \frac{563}{999} = 0.563563563\dots = 0.5\dot{6}\dot{3}$$
- $$\frac{714}{990} = 0.7212121\dots = 0.7\dot{2}\dot{1} \quad \frac{1}{3} = 0.333\dots = 0.\dot{3} \quad \frac{1}{6} = 0.1666\dots = 0.1\dot{6}$$

例題 $\frac{13}{6}$ を循環小数の記号・を用いて表せ.

解 $\frac{13}{6} = 2.1666\dots = 2.1\dot{6}$

小数の分数表記

a は整数, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ は 0 以上 9 以下の整数とする.

① 有限小数のとき

実数 x が小数第 n 位までの有限小数

$$x = a.b_1b_2 \cdots b_n$$

とすると

$$x = a. \underbrace{b_1b_2 \cdots b_n}_{n \text{ 個}} = \frac{ab_1b_2 \cdots b_n}{1 \underbrace{00 \cdots 0}_{n \text{ 個}}}$$

② 循環小数のとき

実数 x が小数第 1 位から第 n 位までを繰り返す循環小数

$$x = a.\dot{b}_1b_2 \cdots \dot{b}_n = a.b_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_n \cdots$$

とすると

$$x = a. \underbrace{\dot{b}_1b_2 \cdots \dot{b}_n}_{n \text{ 個}} = \frac{ab_1b_2 \cdots b_n - a}{\underbrace{99 \cdots 9}_{n \text{ 個}}}$$

これは $1 \underbrace{00 \cdots 0}_{n \text{ 個}} x - x$ を計算することで求まる.

例 ① $1.\underline{23} = \frac{123}{1\underbrace{00}_{2 \text{ 個}}} = \frac{123}{100}$

② $0.\underline{\dot{2}1} = \frac{21-0}{\underbrace{99}_{2 \text{ 個}}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

これは $x = 0.\dot{2}1 = 0.0.212121 \cdots$ とおくと

$$100x = 21.2121 \cdots \quad \cdots \text{①}$$

$$x = 0.2121 \cdots \quad \cdots \text{②}$$

① - ② として $99x = 21$

よって $x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

例題 次の小数を既約分数 (それ以上約分できない分数) で表せ.

- (1) 5.21 (2) $5.\dot{2}1$

解 (1) $5.21 = \frac{521}{1000}$ (2) $5.\dot{2}1 = \frac{521-5}{99} = \frac{516}{99} = \frac{172}{33}$

自然数と整数

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

を ^{せいすう}整数 という.

とくに

1, 2, 3, 4, 5, ...

を 正の整数 または ^{しぜんすう}自然数 という.

⑩ 負の整数と正の整数と 0 を合わせて整数という.

有理数

0 でない整数 m と整数 n を用いて $\frac{n}{m}$ と表される数を ^{ゆうりすう}有理数 という.

つまり (有理数) = $\frac{\text{(整数)}}{\text{(整数)}}$

有理数は整数, 有限小数, 循環小数 のいずれかで表される.

⑪ $\frac{3}{5}$, $0.3 = \frac{3}{10}$, $7 = \frac{7}{1}$, ... は有理数である.

⑫ 0 は有理数である. なぜなら $0 = \frac{0}{1}$ より $\frac{\text{(整数)}}{\text{(整数)}}$ と表すことができるからである.
0 も含め, 整数はすべて有理数である.

無理数

実数のうち有理数でないものを ^{むりすう}無理数 という.

無理数は循環しない無限小数で表される.

⑬ $\sqrt{2} = 1.4142\dots$, $\sqrt{3} = 1.73205\dots$, $\pi = 3.141592\dots$ は無理数である.

例題 次の ① ~ ⑤ の数から有理数であるものをすべて選べ.

① -3

② $\sqrt{3}$

③ 0

④ 0.3

⑤ $0.\dot{3}$

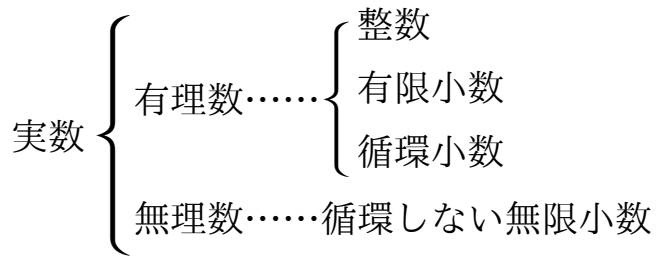
⑭ 有理数であるものは ①, ③, ④, ⑤

実数

整数と有限小数 または 無限小数で表される数をあわせて ^{じっすう}実数 という。
すなわち 有理数または無理数をあわせて 実数 という。

実数の分類

実数を分類すると次のようになる。



例題 次の文が正しくないことを説明せよ。
無限小数はすべて無理数である。

解 ① 循環する無限小数は無理数ではないので、「無限小数」はすべて無理数ではない。
例えば、 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ は無限小数であるが、無理数ではなく有理数である。

四則計算 (四則演算)

2つの数 a, b に対し

① $a + b$ を ^{かほう}加法 または ^わ和 という.

② $a - b$ を ^{げんほう}減法 または ^さ差 という.

③ $a \times b$ を ^{じょうほう}乗法 または ^{せき}積 という.

④ $a \div b$ を ^{じょほう}除法 または ^{しょう}商 という.

これら 4つの計算をまとめて ^{しそくけいさん}四則計算 または ^{しそくえんざん}四則演算 という.

③ について \times を \cdot で表したり省略することもある.

つまり $a \times b = a \cdot b = ab$

④ について \div を分数で表わすこともできる. また, 0 で割ることは考えない.

つまり $a \div b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

⑨ 補 和 (足し算), 差 (引き算), 積 (掛け算), 商 (割り算) を四則計算 (四則演算) という.

⑩ 注 差 $a - b = a + (-b)$ となるので, 減法は加法におきかえることができる.

⑪ 注 商 $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ となるので, 除法は乘法におきかえることができる.

例題 2つの数 2 と 3 の四則計算をせよ.

⑫ 解 和 : $2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5$, 差 : $2 - 3 = -1, 3 - 2 = 1$

積 : $2 \times 3 = 6, 3 \times 2 = 6$, 商 : $2 \div 3 = \frac{2}{3}, 3 \div 2 = \frac{3}{2}$

実数と有理数の四則計算

① 2つの実数の四則演算はつねに実数である。

つまり、2つの実数 a, b に対して

$$\text{和} : a + b, \text{差} : a - b, \text{積} : ab, \text{商} : \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

はすべて実数である。

② 2つの有理数の四則演算はつねに有理数である。

つまり、2つの有理数 a, b に対して

$$\text{和} : a + b, \text{差} : a - b, \text{積} : ab, \text{商} : \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

はすべて有理数である。

⑨ 商について、0でわることは考えない。

⑩ ② 2つの有理数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ について

$$\text{和} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \text{差} : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \text{積} : \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \text{商} : \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

はすべて有理数である。

例題 次の文が正しくないことを説明せよ。

2つの整数の四則計算はつねに整数である。

⑪ ② 2つの整数 2, 3 について 商 $: 2 \div 3 = \frac{2}{3}$ は整数ではない。

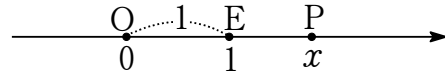
よって、2つの整数の四則計算は商が整数にならないことがあるので、つねに整数ではない。

数直線

直線上に点 O をとり、 O と異なる E をとる。

点 O と点 E の距離 OE を 1 として、直線上の点に

それを表す実数を対応させることができる。



この直線を ^{すうちよくせん}数直線、点 O を ^{げんてん}原点という。

数直線上の点 P に対応する実数を x として、この x を点 P の ^{ざひょう}座標という。

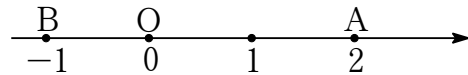
座標が x である点 P を $P(x)$ と表す。

とくに $O(0)$, $E(1)$

補 ① すべての実数は数直線上の点として表すことができる。

補 ② $OE = 1$ を単位の長さという。

例 ③ 数直線上に $A(2)$, $B(-1)$ をとると右図。



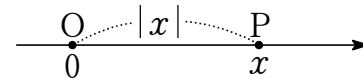
絶対値

数直線上で原点 $O(0)$ と点 $P(x)$ の距離 OP を

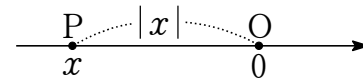
x の ^{ぜったいち}絶対値 といひ $|x|$ で表す。

実数 x の絶対値について、次が成り立つ。

[$x > 0$ のとき]



[$x < 0$ のとき]



① $x = 0$ のとき $|0| = 0$

② $x > 0$ のとき $|x| = x$

③ $x < 0$ のとき $|x| = -x$

例 ① 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(0)$ の距離 $OP = |0| = 0$

② 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(3)$ の距離 $OP = |3| = 3$

③ 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(-3)$ の距離 $OP = |-3| = 3$



例題 次の値を答えよ。

- (1) $|2|$ (2) $|-1|$ (3) $|0|$

解 (1) $|2| = 2$ (2) $|-1| = 1$ (3) $|0| = 0$

絶対値記号をはずす変形実数 x に対して

$$\text{① } x \geq 0 \text{ のとき } |x| = x$$

$$\text{② } x \leq 0 \text{ のとき } |x| = -x$$

すなわち

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}$$

補 「絶対値記号をはずす」ことを「絶対値をはずす」ということもある。

例 ① $|3| = 3$

② $|-3| = -(-3) = 3$

例題 次の値を答えよ。ただし、 π は円周率である。

(1) $|\pi|$ (2) $|\pi - 3|$ (3) $|\pi - 4|$

解 π は円周率なので $\pi = 3.14\dots$

(1) $\pi > 0$ であるから $|\pi| = \pi$

(2) $\pi - 3 > 0$ であるから $|\pi - 3| = \pi - 3$

(3) $\pi - 4 < 0$ であるから $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi$

数直線上の2点間の距離

数直線上の2点 $A(a)$, 点 $B(b)$ の距離 AB は

$a = b$ のとき $AB = 0$

$a < b$ のとき $AB = b - a$

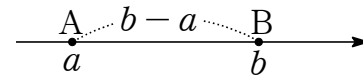
$b < a$ のとき $AB = a - b$

すなわち

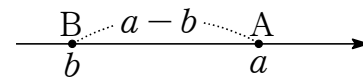
$AB = |b - a|$ または $AB = |a - b|$

と表せる.

[$a < b$ のとき]

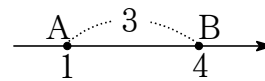


[$b < a$ のとき]



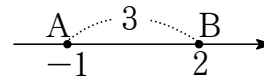
例 数直線上の2点 $A(1)$, $B(4)$ の距離 AB は

$AB = |4 - 1| = |1 - 4| = 3$



例題 数直線上の2点 $A(2)$, $B(-1)$ の距離 AB を求めよ.

解 $AB = |2 - (-1)| = |3| = 3$



絶対値と等式

x を実数とする.

- ① $|x| = 0$ を満たすならば $x = 0$
- ② $|x| = r$ かつ $r > 0$ を満たすならば $x = \pm r$
- ③ $|x| = r$ かつ $r < 0$ を満たす実数 x はない

④ 数直線上で原点 O と点 $P(x)$ の距離が $|x|$ となることを考える.

- 例
- ① $|x| = 0$ を満たすならば $x = 0$
 - ② $|x| = 3$ を満たすならば $x = \pm 3$
 - ③ $|x| = -3$ を満たす実数 x はない. (原点との距離が負になることはない)

絶対値と不等式

x を実数, $r > 0$ とするとき

- ① $|x| < r$ を満たす x の値の範囲は $-r < x < r$
- ② $|x| > r$ を満たす x の値の範囲は $x < -r, r < x$

- ④
- ① 数直線上で原点 O と点 $P(x)$ の距離 $|x|$ が r より小さい x は $-r < x < r$
 - ② 数直線上で原点 O と点 $P(x)$ の距離 $|x|$ が r より大きい x は $x < -r, r < x$
- 例
- ① $|x| < 3$ を満たす x の値の範囲は $-3 < x < 3$
 - ② $|x| > 3$ を満たす x の値の範囲は $x < -3, 3 < x$

例題 次の問に答えよ.

- (1) $|x| = 1$ を満たす x の値を求めよ.
- (2) $|x| < 1$ を満たす x の値の範囲を求めよ
- (3) $|x| \leq 1$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

解

- (1) $|x| = 1$ を満たす x の値は $x = \pm 1$
- (2) $|x| < 1$ を満たす x の値の範囲は $-1 < x < 1$
- (3) $|x| \leq 1$ を満たす x の値の範囲は $-1 \leq x \leq 1$

絶対値の性質

x, y を実数とする.

① $|x| \geq 0$ (等号が成り立つのは $x = 0$)

② $|-x| = |x|$

③ $|x|^2 = x^2$

④ $|xy| = |x||y|$

⑤ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$)

例 ① $|3| \geq 0$

② $|-3| = |3|$

③ $|-3|^2 = (-3)^2 = 9$

④ $|2 \cdot 3| = |2||3|$

⑤ $\left| \frac{2}{3} \right| = \frac{|2|}{|3|}$

補 ① 絶対値は距離なので 0 以上 (負にはならない)

② $-x$ と x の絶対値は等しい

③ 2 乗すると, 絶対値記号はなくてもよい

④ 積の絶対値は分けることができる.

⑤ 商の絶対値は分けることができる.

例題 x, y を実数とする. 次の文が正しくないことを説明せよ.

$|x + y| = |x| + |y|$ はつねに成り立つ.

解 $x = 3, y = -2$ について

$|x + y| = |3 + (-2)| = |1| = 1$

$|x| + |y| = |3| + |-2| = 3 + 2 = 5$

つまり $|3 + (-2)| \neq |3| + |-2|$

よって, $|x + y| = |x| + |y|$ が成り立たないことがあるので, つねに成り立たない.

補 $xy \geq 0$ とすると, つねに成り立つ.

平方根と根号

2乗して a になる数 すなわち $x^2 = a$ となる数 x を a の^{へいほうこん}平方根 という。

① 正の数 a の平方根は正と負の2つあり 正の方を \sqrt{a} , 負の方を $-\sqrt{a}$ で表す。

記号 $\sqrt{\quad}$ を^{こんごう}根号 または ルート (root) という。

② 負の数 a の平方根は実数の範囲には存在しない。

③ 0 の平方根は 0 だけであり $\sqrt{0} = 0$ とする。

④ ① 9 の平方根は $x^2 = 9$ となる x より 3 と -3 の2つあり

正の方は $3 = \sqrt{9}$, 負の方は $-3 = -\sqrt{9}$

② -3 の平方根は $x^2 = -3$ となる実数 x がないので, 実数の範囲には存在しない。

③ 0 の平方根は $x^2 = 0$ となる x が 0 だけなので $\sqrt{0} = 0$

平方根の性質

$a \geq 0$ とする。

① $\sqrt{a} \geq 0$ (等号が成り立つのは $a = 0$)

② $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

④ ① $a > 0$ のとき, 定義から \sqrt{a} は正で, $a = 0$ のとき $\sqrt{a} = \sqrt{0} = 0$

② $x^2 = a$ ($a \geq 0$) となる x が $x = \pm\sqrt{a}$ であることから $(\pm\sqrt{a})^2 = a$

④ 補 ① $\sqrt{\quad}$ の値は 0 以上

④ 例 ② $(\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3$

例題 81 の平方根を求めよ。

④ 解 81 の平方根は $x^2 = 81$ となる x より $x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$

平方された実数の根号

a を実数とするとき

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

例 $\sqrt{3^2} = |3| = 3$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

注 $\sqrt{a^2} = a$ や $\sqrt{a^2} = \pm a$ は間違い. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ や $\sqrt{3^2} = \pm 3$ としないこと.

根号を含む式の変形

$a > 0, b > 0$ とする.

1 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3 $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

考 1 $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

$\sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0$ より $\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$

よって, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の正の平方根であるから $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

例 1 $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

2 $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$

3 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

例題 次の式を簡単にせよ.

(1) $\sqrt{7}\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{2}}$ (3) $\sqrt{200}$

解

(1) $\sqrt{7}\sqrt{3} = \sqrt{7 \cdot 3} = \sqrt{21}$

(2) $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{42}{2}} = \sqrt{21}$

(3) $\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$

分母の有理化

分数式において

分母に根号を含む式を分母に根号を含まない式に変形することを

分母を^{ゆうりか}有理化するという。

基本的な分母の有理化

$a > 0, b > 0, a \neq b$ とする。

① 分母に \sqrt{a} があるときは、分母・分子に \sqrt{a} をかける。

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

② 分母に $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ があるときは、分母・分子に $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ をかける。

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

③ 分母に $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ があるときは、分母・分子に $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ をかける。

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

④ ① $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ となることを考える。

②, ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ となることを考える。

例 ① $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

例題 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

解

(1) $\frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{5 + \sqrt{10}}{3}$

★二重根号をはずす

$a > 0, b > 0, a \neq b$ とする.

$$\text{① } \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} &= \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \\ &= \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} & (a > b) \\ \sqrt{b} - \sqrt{a} & (b > a) \end{cases} \end{aligned}$$

④ $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}$ となることから $\sqrt{\quad}$ の中に 2 乗の形を作る.

例 ① $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2+2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

② $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2-2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

例題 次の式の二重根号をはずして簡単にせよ.

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ (2) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

解

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7+3+2\sqrt{7 \cdot 3}} = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{10-2\sqrt{24}} = \sqrt{6+4-2\sqrt{6 \cdot 4}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{4})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{4}$
 $= \sqrt{6} - 2$

(3) $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad (\because (1))$
 $= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{2}$

整数部分と小数部分

x を実数とすると

$$\begin{cases} x = m + \alpha \\ m \leq x < m + 1 \text{ (} m \text{ は整数)} \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

を満たす m, α がただ 1 つあり,

m を x の せいすうぶぶん 整数部分, α を x の しょうすうぶぶん 小数部分 という.

例 $x = 3.14$ について $x = 3 + 0.14$ であるから整数部分は 3, 小数部分は 0.14

整数部分と小数部分の求め方

実数 x について, 整数部分と小数部分は次のように求めることができる.

① x をこえない最大の整数 m を求める.

つまり $m \leq x < m + 1$ をみたす整数 m を求める.

この m が x の整数部分である.

なお, x が正の数ならば, x を小数で表して

$$x = \square. \dots$$

この \square が整数部分 m である.

② x から整数部分 m をひき $x - m = \alpha$

この α が x の小数部分である.

例 $\sqrt{10}$ の整数部分と小数部分を求める.

① $3^2 < 10 < 4^2$ なので $\sqrt{3^2} < \sqrt{10} < \sqrt{4^2}$

すなわち $3 < \sqrt{10} < 4$

よって, $\sqrt{10}$ の整数部分は 3

② $\sqrt{10}$ の小数部分は整数部分をひいて $\sqrt{10} - 3$

例題 $\sqrt{53}$ の整数部分と小数部分をそれぞれ求めよ.

解 $7^2 < 53 < 8^2$ なので $7 < \sqrt{53} < 8$

よって, $\sqrt{53}$ の整数部分は 7, 小数部分は $\sqrt{53} - 7$

補 $\sqrt{53} = 7.2801098\dots$

□ 近似値

真の値に近い値のことを^{きんじち}近似値という。

x の近似値が α であることを $x \doteq \alpha$ と表す。

⑨ \doteq は「ニアリーイコール (nearly equal)」と読む。

⑩ 円周率 $\pi = 3.141592\dots$ の近似値に 3.14 があるが、 $\pi \doteq 3.14$ と表す。

□ 誤差

近似値から真の値をひいた差を^{ごさ}誤差という。

すなわち (誤差) = (近似値) - (真の値)

⑪ (誤差) = |(近似値) - (真の値)| とすることもある。

⑫ x が 1 の位を四捨五入した近似値が 30 である数とすると

x のとりうる値の範囲は $25 \leq x < 35$

誤差は $30 - x$

誤差の絶対値は 5 以下である。

例題 x は十の位を四捨五入した近似値が 700 である数とする。

この x のとりうる値の範囲を不等式で表せ。

⑬ 解 x は十の位を四捨五入した近似値が 700 である数なので

$$650 \leq x < 750$$

□有効数字

近似値を表す数のうち、信頼できる数字を^{ゆうこうすうじ}有効数字といい、その数字の個数を、有効数字のけた数という。

有効数字をはっきり示す場合は、

整数の部分が1けたの数と、10の累乗との積の形に表すことがある。

すなわち (近似値) = □.□□ × 10ⁿ

ただし □.□□ は有効数字の数だけで表した小数、□ は1桁の整数、

n は近似値が正の整数である場合は、近似値のけた数から1をひいた数

① 近似値が56300である数は次のように表せる。

有効数字が3けたのとき 5.63×10^4

有効数字が4けたのとき 5.630×10^4

例題 地球と月の距離はおよそ384000kmである。有効数字が3けたのとき、この距離を整数部分が1けたの小数と10の累乗との積の形で表せ。

② 近似値384000kmの有効数字が3けたなので

3.84×10^5 (km)

有名な近似値

次のような近似値がある.

数	有効数字 10 けた	有効数字 3 けた
$\sqrt{2}$	1.414213562	1.41
$\sqrt{3}$	1.732050808	1.73
$\sqrt{5}$	2.236067977	2.24
$\sqrt{6}$	2.449489743	2.45
$\sqrt{7}$	2.645751311	2.65
円周率 π	3.141592654	3.14

① $\sqrt{2} = 1.41$ とすると $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2 \cdot 1.41 = 2.82$

② $\sqrt{2} + \sqrt{3} \doteq 1.41 + 1.73 = 3.14$ なので $\sqrt{2} + \sqrt{3} \doteq \pi$

例題 $\sqrt{2} = 1.41$ とするとき, $\sqrt{20000}$ の値を求めよ.

解 $\sqrt{20000} = \sqrt{100^2 \cdot 2} = 100\sqrt{2} = 100 \cdot 1.41$
 $= 141$

不等式

数量の間の大小関係を

不等号 $>$, $<$, \geq , \leq

だいなり しょうなり だいなりイコール しょうなりイコール

を使って表した式を **不等式** という。

不等号の左側の部分を左辺, 右側の部分を右辺といい 合わせて両辺という。

- ⑨ 不等式 $a < b$ は「 b は a より大きい」, 「 a は b より小さい」, 「 a は b 未満」という。
 不等式 $a \leq b$ は「 $a = b$ または $a < b$ 」を意味し「 b は a 以上」, 「 a は b 以下」という。
- ⑩ ある人のテストの点数 x 点が 80 点未満であることは $x < 80$ と表せる。

例題 1 個 a 円の商品 A を 3 個と, 1 個 b 円の商品 B を 5 個購入すると, 代金は 1000 円以上になる。このとき, 金額の間の大小関係を不等式で表せ。

⑪ **解** $3a + 5b \geq 1000$ あるいは $1000 \leq 3a + 5b$

不等式の基本性質

3つの実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ かつ } b < c \text{ ならば } a < c$$

例 $x < 2$ かつ $2 < y$ ならば $x < y$

実数の大小関係の基本性質

3つの実数 a, b, c について, 次のことが成り立つ.

① $a < b$ の両辺に c をたして $a + c < b + c$

② $a < b$ の両辺から c をひいて $a - c < b - c$

③ $a < b$ の両辺に c ($c > 0$) をかけて $ac < bc$

④ $a < b$ の両辺を c ($c > 0$) でわって $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $a < b$ の両辺に c ($c < 0$) をかけて $ac > bc$

⑥ $a < b$ の両辺を c ($c < 0$) でわって $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

例 ① $2 < 4$ の両辺に 2 をたして $4 < 6$

② $2 < 4$ の両辺から 1 をひいて $1 < 3$

③ $2 < 4$ の両辺に 2 (> 0) をかけて $4 < 8$

④ $2 < 4$ の両辺を 2 (> 0) でわって $1 < 2$

⑤ $2 < 4$ の両辺に -2 (< 0) をかけて $-4 > -8$

⑥ $2 < 4$ の両辺を -2 (< 0) でわって $-1 > -2$

注 不等式があるとき, 両辺に負の数をかけたり, 両辺を負の数で割ると不等号の向きが逆になる.

例題 $x + 2 < 1$ を満たす x の範囲を不等式で表せ.

解 $x + 2 < 1$ の両辺から 2 をひいて $x < -1$

不等式と解

x の満たすべき条件を表した不等式を x についての**不等式** という.

x についての不等式を成り立たせる x の値をその不等式の**解**という.

不等式のすべての解を求めることを, その不等式を**解く**という.

例 x についての不等式 $x + 2 < 1$ を解くと, 解は $x < -1$

1次不等式

a, b を実数とし $a \neq 0$ とする.

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$$

のように表される不等式を x についての**1次不等式** という.

1次不等式の変形

A, B を実数とし $A \neq 0$ とする.

$$Ax > B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

について

① $A > 0$ のとき

①の両辺を A でわって $x > \frac{B}{A}$

あるいは ①の両辺に $\frac{1}{A}$ をかけて $x > \frac{B}{A}$

② $A < 0$ のとき

①の両辺を A でわって $x < \frac{B}{A}$

あるいは ①の両辺に $\frac{1}{A}$ をかけて $x < \frac{B}{A}$

例 ① $3x > 5$ の両辺を 3 でわって $x > \frac{5}{3}$

② $-3x > 5$ の両辺を -3 でわって $x < \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

例題 x の不等式 $3x - 5 \geq -2x + 1$ を解け.

解 $3x - 5 \geq -2x + 1$ の両辺に $2x + 5$ をたして $3x + 2x \geq 1 + 5$

整理して $5x \geq 6$

両辺を 5 でわって $x \geq \frac{6}{5}$

連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたものを^{れんりつふとうしき}連立不等式という。
 それらの不等式を同時に成り立たせる x の範囲を求めることを
 連立不等式を解くという。

① 連立不等式 $\begin{cases} -2 \leq 2x & \dots\dots ① \\ 2x < x + 5 & \dots\dots ② \end{cases}$

を解く。

① の両辺を 2 でわって $-1 \leq x \dots\dots ①'$

② の両辺に $-x$ をたして $x < 5 \dots\dots ②'$

よって、①' かつ ②' より $-1 \leq x < 5$

3つの数の大小関係と連立不等式

不等式 $A < B < C$ は

$$A < B \text{ かつ } B < C \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$$

であることと同じである。

① 不等式 $-2 \leq 2x < x + 5$ は

連立不等式 $\begin{cases} -2 \leq 2x & \dots\dots ① \\ 2x < x + 5 & \dots\dots ② \end{cases}$

を解くことと同じである。

よって $-1 \leq x < 5$

例題 不等式 $3x - 5 \leq 2x + 1 < 4x + 3$ を解け。

① 解 連立不等式 $\begin{cases} 3x - 5 \leq 2x + 1 & \dots\dots ① \\ 2x + 1 < 4x + 3 & \dots\dots ② \end{cases}$

を解くことと同じである。

① の両辺に $-2x + 5$ をたして $x \leq 6 \dots\dots ①'$

② の両辺に $2x - 3$ をたして $-2 < 2x$

両辺を 2 でわって $-1 < x \dots\dots ②'$

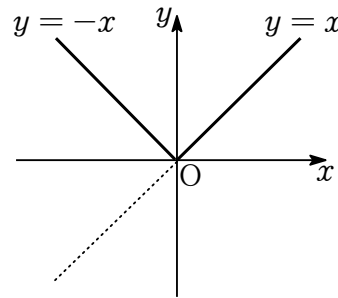
よって、①' かつ ②' より $-1 < x \leq 6$

$y = |f(x)|$ のグラフ

$y = |f(x)|$ のグラフは次の手順で描くことができる.

- ① 絶対値記号をはずした $y = f(x)$ のグラフを描く.
- ② ① のグラフの x 軸より下側の部分を x 軸に関して上側に折り返す
(x 軸に関して対称移動する)

- ⑧ $y = |f(x)|$ のグラフは
 $f(x) \geq 0$ ならば $y = f(x)$
 $f(x) < 0$ ならば $y = -f(x)$



- ⑨ $y = |x|$ のグラフは右図.
 $x \geq 0$ ならば $y = x$
 $x < 0$ ならば $y = -x$

絶対値を含む不等式

絶対値を含む不等式は

- ① 絶対値記号をはずして考える.
- ② グラフを用いて考える.

⑩ ① だと場合分けが必要になることがあるので、グラフが描けるならば ② がおすすめ.

⑪ 不等式 $|x| \leq 2x - 1$ を解く.

① ① (あ) $x \geq 0$ のとき $x \leq 2x - 1$ すなわち $1 \leq x$

これは $x \geq 0$ をみたとす.

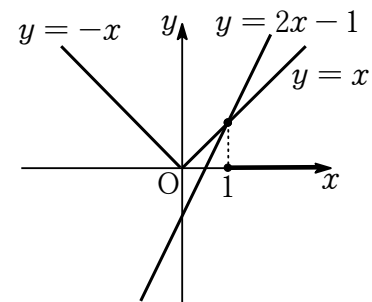
① (い) $x < 0$ のとき $-x \leq 2x - 1$ すなわち $\frac{1}{3} \leq x$

これは $x < 0$ をみたとさないの不適.

よって $1 \leq x$

② $\begin{cases} y = |x| \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

のグラフを考えて $1 \leq x$



例題 不等式 $|x| > 2x - 1$ を解け.

⑫ 上の ⑪ 以外の実数 x であるから $x < 1$