5

$f(x)=x^2+ax+b$

すべての解αに対して $\alpha^n=1$ となることから $|\alpha|^n=1$ $\therefore |\alpha|=1$,

← $f(x)=0$の解は高々2個
実数解と虚数解で場合分けする

(あ) $f(x)=0$ の解が2つとも実数のとき

解αは $|\alpha|=1$ をみたすことから 2つの解は $x=-1$ または $x=1$ ← $\alpha=\pm1$, 重解があることに注意

$f(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$ $(a,b)=(2,1)$ または $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ $(a,b)=(-2,1)$ または $f(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$ $(a,b)=(0,-1)$ に限られる

$\alpha=\pm1$ ときに $\alpha^2=1$ となる. ← すべての解α $(=\pm1)$に対して $\alpha^n=1$となる正の整数 $n=2$ が存在する

(い) $f(x)=0$の解がともに虚数のとき

$a^2-4b<0$ …① ← (判別式)<0

$f(x)=0$ の解は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,i}{2}$ ← $4b-a^2>0$

1つの解をαとすると他方の解は $\bar{\alpha}$ ← 実数係数の2次方程式なので虚数解は共役になる

$f(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+|\alpha|^2$

$=x^2-\underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{a}x+\underbrace{1}_{b}$

$\begin{cases}\alpha+\bar{\alpha}=-a\\ b=1 \quad …②\end{cases}$

②を①へ代入して $a^2<4$ ← $-2<a<2$ をみたす整数 $(|a|<2)$

aは整数なので $a=0,\pm1$

(ア) $a=0$, $b=1$ ならば $f(x)=x^2+1$

$\alpha=\pm i$ ときに $\alpha^4=1$ ← $n=4$が存在

(イ) $a=-1$, $b=1$ ならば $f(x)=x^2-x+1$

$\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ ↓ド・モアブルの定理

$\alpha^6=\cos(\pm2\pi)+i\sin(\pm2\pi)=1$ ← $n=6$が存在

(ウ) $a=1$, $b=1$ ならば $f(x)=x^2+x+1$

$\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$

$\alpha^3=\cos(\pm2\pi)+i\sin(\pm2\pi)=1$ ← $n=3$が存在

よって $\boxed{(a,b)=(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1)}$

↑ bは1だけ

補

$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$

$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$