4

$1-p_k=q_k\ (k=1,2,\dots,n)$ とする

$f(x)=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\cdot\cdots\cdot(p_nx+q_n)=\sum_{r=0}^{n}S_rx^r=S_0+S_1x+S_2x^2+\cdots+S_nx^n$

(S_r は $f(x)$ を展開した式の x^r の係数)

n 枚の硬貨 $C_1, C_2, \dots, C_n$ を投げて表が r 枚出る確率は $f(x)$ を展開した式の x^r の係数 S_r に等しい

表が奇数枚出る確率は $f(x)$ を展開した式の奇数乗の和 $S_1+S_3+\cdots+S_m$ (m は n をこえない最大の奇数)

↖ 二項分布の応用

例 表が3回は x^3 の係数で

$p_1p_2p_3q_4q_5\cdots q_n$

$q_1p_1p_2q_4p_5\cdots q_n$

などがある

$$f(1)=S_0+S_1+S_2+\cdots+S_n$$

$$-)\ f(-1)=S_0-S_1+S_2-\cdots+(-1)^nS_n$$

$$f(1)-f(-1)=2(S_1+S_2+\cdots+S_m)$$ (m は n をこえない最大の個数)

ゆえに

$$S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{1}{2}\{1-f(-1)\}$$

$f(-1)$ の因数 a_1 は $-p_k+q_k=p_k+q_k-2p_k$
$=1-2p_k$

↑ n 個の因数はすべてこの変形になる (p_k だけで決まる)

(1) $p_k=\frac{1}{3}$ のとき

$$-p_k+q_k=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ f(-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって $$X_n=\frac{1}{2}\{1-f(-1)\}=\boxed{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

(2) $p_k=\frac{1}{2(k+1)}$ のとき

$$-p_k+q_k=1-2\frac{1}{2(k+1)}=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

$$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

よって $$Y_n=\frac{1}{2}\{1-f(-1)\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\boxed{\frac{n}{2(n+1)}}$$

(3) $k=1,2,\dots,m$ のとき $p_k=\frac{1}{3m}$ より $1-2p_k=1-\frac{2}{3m}$

$k=m+1,m+2,\dots,2m$ のとき $p_k=\frac{2}{3m}$ より $1-2p_k=1-\frac{4}{3m}$

$k=2m+1,2m+2,\dots,3m$ のとき $p_k=\frac{1}{m}$ より $1-2\frac{1}{m}=1-\frac{2}{m}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$f(-1)=\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m$$

$$\lim_{m\to\infty}Z_{3m}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\{1-f(1)\}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\left(1+\frac{1}{-\frac{3m}{2}}\right)^{-\frac{3m}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}\left(1+\frac{1}{-\frac{3m}{4}}\right)^{-\frac{3m}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{m}{2}}\right)^{-\frac{m}{2}(-2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{-\frac{4}{3}}\cdot e^{-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)}$$

4 (漸化式)

こっちが定番かな

$C_1,\cdots,C_n$ の n 枚の硬貨を投げて表の枚数が奇数となる確率を a_n とすると

$C_1,\cdots,C_n,C_{n+1}$ の $(n+1)$ 枚の硬貨を投げて表の枚数が奇数となるのは

$C_1,\cdots,C_n$ の n 枚の硬貨を投げて表が奇数枚 かつ C_{n+1} が裏

または

$C_1,\cdots,C_n$ の n 枚の硬貨を投げて表が偶数枚 かつ C_{n+1} が表

の場合なので

表が奇

$\boxed{C_1,\cdots,C_n}$ $\boxed{C_{n+1}}$

表が奇 裏 $(1-p_{n+1})$

表が偶 表 (p_{n+1})

$$a_{n+1}=a_n(1-p_{n+1})+(1-a_n)p_{n+1}$$
$$=(1-2p_{n+1})a_n+p_{n+1} \quad \cdots (*)$$

$a_0=0$ として $n=0,1,2,\cdots$ で考える ← $n=0$ も考える

(1) (*)で $a_n=x_n$ として $p_n=\frac{1}{3}$ なので $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{3}$

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$
$$x_n-\frac{1}{2}=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって $x_n=\boxed{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$

(2) (*)で $a_n=y_n$ として $p_n=\frac{1}{2(n+1)}$ なので $y_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}y_n+\frac{1}{2(n+2)}$

$y_0=0$

両辺に $n+2$ をかけて $(n+2)y_{n+1}=(n+1)y_n+\frac{1}{2}$ ← $(n+1)y_n$ は公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列

$$(n+1)y_n=\underbrace{y_0}_{0}+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n$$

よって $y_n=\boxed{\frac{n}{2(n+1)}}$

(3) (*)で $p_k=\frac{1}{3m}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ とすると $a_{n+1}=\left(1-\frac{2}{3m}\right)a_n+\frac{1}{3m}$ $(n=0,1,\cdots,m-1)$ ← 3つのケースに分けて漸化式を考えていく

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{3m}\right)\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore a_m-\frac{1}{2}=\left(a_0-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m \quad \cdots ①$$

← 数列 $\{a_n-\frac{1}{2}\}$ の第 m 項は第0項 $a_0-\frac{1}{2}$ 公比 $\left(1-\frac{2}{3m}\right)$ の等比数列から求まる

$$\therefore a_m=\frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\right\}$$

$p_k=\frac{2}{3m}$ $(k=m+1,\cdots,2m)$ とすると $a_{n+1}=\left(1-\frac{4}{3m}\right)a_n+\frac{1}{3m}$ $(n=m,m+1,\cdots,2m-1)$

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{4}{3m}\right)\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

← 数列 $\{a_n-\frac{1}{2}\}$ の第 $2m$ 項は第 m 項 a_m 公比 $\left(1-\frac{4}{3m}\right)$ の等比数列から求まる

$$a_{2m}-\frac{1}{2}=\left(a_m-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m \quad (\because ①) \quad \cdots ②$$

$p_k=\frac{1}{m}$ $(k=2m+1,\cdots,3m)$ とすると $a_{n+1}=\left(1-\frac{2}{m}\right)a_n+\frac{1}{m}$ $(n=2m,2m+1,\cdots,3m-1)$

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

← 数列 $\{a_n-\frac{1}{2}\}$ の第 $3m$ 項は第 $2m$ 項 公比 $\left(1-\frac{2}{m}\right)$ の等比数列から求まる

$z_{3m}=a_{3m}$ なので

$$a_{3m}-\frac{1}{2}=\left(a_{2m}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)^m$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m \quad (\because ②)$$

$$\lim_{m\to\infty}z_{3m}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4}{3}}e^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}=\boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)}$$