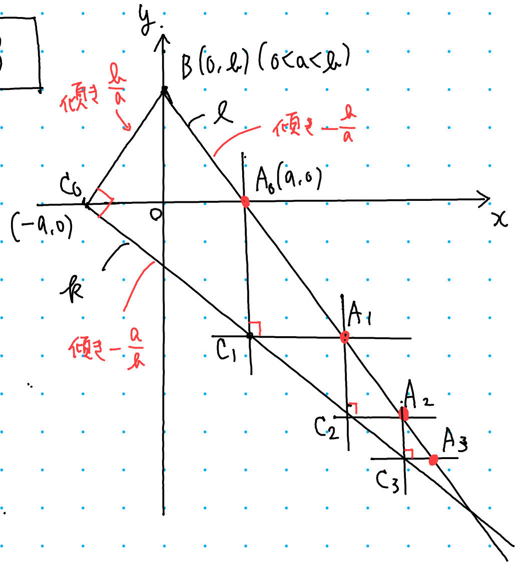
3

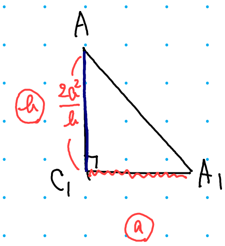



(1) $\ell : \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\ell}=1 \iff y=-\dfrac{\ell}{a}x+\ell$

$k : y=-\dfrac{a}{\ell}(x+a)$

$k$ で $x=a$ として $y=-\dfrac{2a^2}{\ell}$

$\therefore\ C_1\left(a, -\dfrac{2a^2}{\ell}\right),\ AC_1=\dfrac{2a^2}{\ell}$




$\ell$ の傾きが $-\dfrac{\ell}{a}$ であることから

$C_1A_1=\dfrac{a}{\ell}AC_1=\dfrac{a}{\ell}\cdot\dfrac{2a^2}{\ell}=\dfrac{2a^3}{\ell^2}$

($\ell$ で $y=-\dfrac{2a^2}{\ell}$ として $x=\dfrac{2a^3}{\ell^2}+a$)

$\therefore\ A_1\left(\dfrac{2a^3}{\ell^2}+a,\ -\dfrac{2a^2}{\ell}\right)$

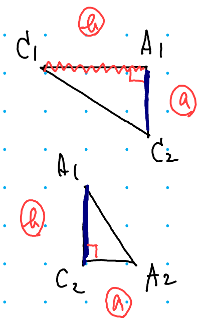
$A=A_0$ として $A_n$ の $x$ 座標を $a_n$ $(n=0,1,2,\dots)$

$C=C_0$ として $C_n$ の $y$ 座標を $c_n$ $(n=0,1,2,\dots)$

とすると, $a_0=a,\ c_0=-a$

$A_n(a_n, c_n),\ C_n(a_{n-1}, c_n)$ $(n=1,2,\dots)$ ← これを求める!

$k$ の傾きが $-\dfrac{a}{\ell}$ であることから



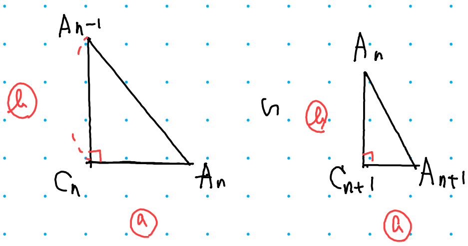

$A_1C_2=\dfrac{a}{\ell}C_1A_1$

$=\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2C_1A$

$C_2A_2=\dfrac{a}{\ell}A_1C_2$

$=\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2C_1A_1$

$\triangle A_{n-1}C_nA_n \sim \triangle A_nC_{n+1}A_{n+1}$




相似比 $1 : \left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2$

$\triangle AC_1A_1 \sim \triangle A_1C_2A_2$

相似比 $1 : \left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2$ これをくり返す

$C_{n+1}A_{n+1}=\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2C_nA_n$

より $C_nA_n=C_0A_0\left\{\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2\right\}^n$

$=2a\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}$

$a_n=-a+C_0A_0+C_1A_1+C_2A_2+\dots+C_nA_n$

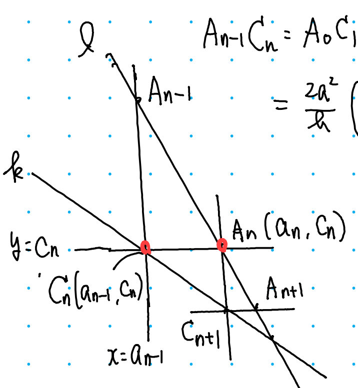
$=-a+2a\left\{1+\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2+\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^4+\dots+\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}\right\}$

$=-a+2a\dfrac{1-\left\{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right\}^{n+1}}{1-\left(\frac{a}{\ell}\right)^2}=-a+\dfrac{2a\ell^2}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2(n+1)}\right\}$

$A_nC_{n+1}=\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2A_{n-1}C_n$

$A_{n-1}C_n=A_0C_1\left\{\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2\right\}^{n-1}$

$=\dfrac{2a^2}{\ell}\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2(n-1)}$



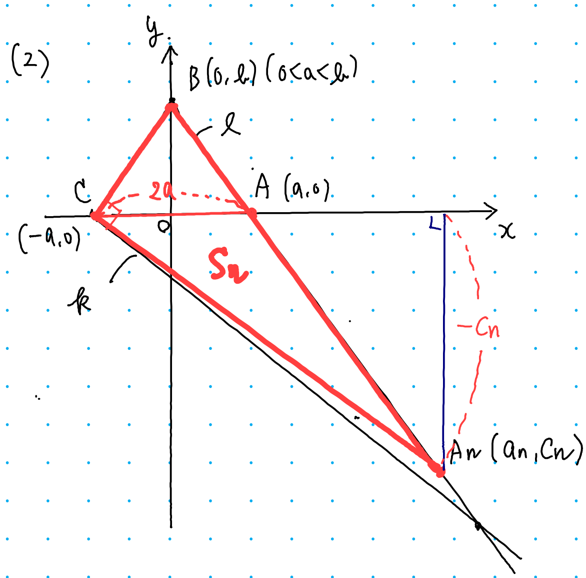

$c_n=-(A_0C_1+A_1C_2+\dots+A_{n-1}C_n)$

$=-\dfrac{2a^2}{\ell}\left\{1+\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^2+\dots+\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2(n-1)}\right\}$

$=-\dfrac{2a^2}{\ell}\cdot\dfrac{1-\left\{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right\}^n}{1-\left(\frac{a}{\ell}\right)^2}=-\dfrac{2a^2\ell}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}\right\}$

よって $\boxed{A_n\left(\underbrace{-a+\dfrac{2a\ell^2}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2(n+1)}\right\}}_{a_n},\ \underbrace{-\dfrac{2a^2\ell}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}\right\}}_{c_n}\right),\ C_n\left(\underbrace{-a+\dfrac{2a\ell^2}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}\right\}}_{a_{n-1}},\ \underbrace{-\dfrac{2a^2\ell}{\ell^2-a^2}\left\{1-\left(\dfrac{a}{\ell}\right)^{2n}\right\}}_{c_n}\right)}$

(2)




面積について

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab$ ← CAを底辺とみる

$$\triangle A_nAC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (-c_n)$$
$$= a \cdot \frac{2a^2 b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}$$

$$S_n = \triangle ABC + \triangle A_nAC$$
$$= \boxed{ab + \frac{2a^3 b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}}$$

(3) $BC = BA$

$0<a<b$ であるから $0<\frac{a}{b}<1$ なので $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}=0$

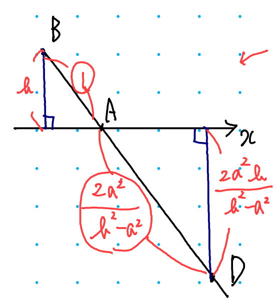
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-a + \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2(n+1)}\right\}\right) = -a + \frac{2ab^2}{b^2-a^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2a^2 b}{b^2-a^2}\left\{1-\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}}_{0}\right\}\right) = -\frac{2a^2 b}{b^2-a^2}$$

$n\to\infty$ のとき $A_n \to T$ とすると $T\left(-a+\frac{2ab^2}{b^2-a^2}, -\frac{2a^2 b}{b^2-a^2}\right)$ ← 2直線kとlの交点

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{BA_n}{BC} = \lim_{n\to\infty}\frac{BD}{BA}$ ← l上での線分比

$$= \frac{2a^2}{b^2-a^2} + 1 = \frac{2a^2+b^2-a^2}{b^2-a^2}$$
$$= \boxed{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}}$$




← B, Dのy座標に着目して

$BA : AD = b : \frac{2a^2 b}{b^2-a^2}$

$= 1 : \frac{2a^2}{b^2-a^2}$