2

$f'(t) = -f(t)g(t)$ …①

$g'(t) = \{f(t)\}^2$ …②

$f(t)>0,\ |g(t)|<1 \quad f(0)=1,\ g(0)=0$

$p(t) = \{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ …③

$q(t) = \log \dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}$ …④

(1) $p'(t) = 2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t)$

$= -2\{f(t)\}^2 g(t) + 2g(t)\{f(t)\}^2 \quad (\because ①,②)$

$= \boxed{0}$

(2) (1)より $p(t)$ は定数関数である ← $p'(t)=0$ なので $p(t)=c$ (cは定数)と表せる
$p(0)=1$ なので $c=1$

③で $t=0$ として $p(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$

よって $p(t)=1$

③から $\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=1$ …③'

$q(t) = \log\{1+g(t)\} - \log\{1-g(t)\}$ ← $\log\dfrac{M}{N}=\log M-\log N$

$$q'(t) = \frac{g'(t)}{1+g(t)} + \frac{g'(t)}{1-g(t)} = \frac{2g'(t)}{\{1+g(t)\}\{1-g(t)\}} = \frac{2g'(t)}{1-\{g(t)\}^2} = \frac{2\{f(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \quad (\because ②,③')$$

↖ ③'から $1-\{g(t)\}^2=\{f(t)\}^2$

$= 2$

よって $q'(t)$ は定数関数である.

(3) (2)より $q(t)=2t+c$ (cは定数) と表せる

④で $t=0$ として $q(0) = \log\dfrac{1+g(0)}{1-g(0)} = \log 1 = 0$

$c=0$ であるから $q(t)=2t$

④から $2t = \log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}$ すなわち $\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)} = e^{2t}$ ← $g(t)$を求める!

両辺に $1-g(t)$ をかけて $1+g(t)=e^{2t}\{1-g(t)\}$

$(e^{2t}+1)g(t) = e^{2t}-1$

$$\therefore\ g(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{1-\frac{1}{e^{2t}}}{1+\frac{1}{e^{2t}}}$$

$$\text{よって}\ \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1-\overbrace{\frac{1}{e^{2t}}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{\to 0}} = \boxed{1}$$

(4) $f(T)=g(T)$ となるのは ③'から $\{f(T)\}^2+\{g(T)\}^2=1$ なので $f(T)=g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

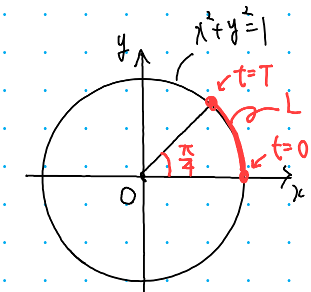
$(x,y)=(f(t),g(t))\ (0\leqq t\leqq T)$ の長さを L とすると

③'から $x^2+y^2=1$

②から $\dfrac{dy}{dt} = g'(t) = \{f(t)\}^2 > 0$

よって L は 半径1, 中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ のおうぎ形の弧の長さに等しく

$L = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$



[別解(4)]　(定積分で求める)

$$L=\int_0^T \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(3)で $g(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ を求めている

$f(T)=g(T)$ となるのは $f(T)=g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $\dfrac{e^{2T}-1}{e^{2T}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2}(e^{2T}-1)=e^{2T}+1$$
$$(\sqrt{2}-1)e^{2T}=\sqrt{2}+1$$
$$e^{2T}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$$
$$\therefore\ e^T=\sqrt{2}+1$$

$$\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2=\{-f(t)g(t)\}^2+\{f(t)\}^4\quad(\because ①,②)$$
$$=\{f(t)\}^2\left(\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right)$$
$$=\{f(t)\}^2\quad(\because ③')$$

③と(3)から $\{f(t)\}^2+\left(\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)^2=1$

$$\{f(t)\}^2=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$

← $g(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ がわかるので

$f(t)$ も求まる

(sinθがわかるので cosθもわかるのと同じ)

$f(t)>0$ なので $f(t)=\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1}$

$$L=\int_0^T\sqrt{\{f(t)\}^2}\,dt=\int_0^T f(t)\,dt=\int_0^T\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt$$

補)
$$\tan^2\frac{3}{8}\pi=\frac{\sin^2\frac{3}{8}\pi}{\cos^2\frac{3}{8}\pi}=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$$

$u=e^t \Leftrightarrow t=\log u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=\dfrac{1}{u}$

t	$0\to T$
u	$1\to\sqrt{2}+1$

← $e^T=\sqrt{2}+1$

$$L=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{2u}{u^2+1}\cdot\frac{dt}{du}\,du=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{2u}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u}\,du$$
$$=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{2}{u^2+1}\,du$$

$u=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$1\to\sqrt{2}+1$
θ	$\frac{\pi}{4}\to\frac{3}{8}\pi$

$\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$ ← 知ってないとキツイかも

$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{2}{\tan^2\theta+1}\frac{du}{d\theta}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{2}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}2\,d\theta$$
$$=2\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}=2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$