

**2** (60点)

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  が次の6つの条件を満たしているとする.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -f(t)g(t), & g'(t) &= \{f(t)\}^2, \\ f(t) &> 0, & |g(t)| &< 1, & f(0) &= 1, & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく.

- (1)  $p'(t)$  を求めよ.
- (2)  $q'(t)$  は定数関数であることを示せ.
- (3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$  を求めよ.
- (4)  $f(T) = g(T)$  となる正の実数  $T$  に対して, 媒介変数表示された平面曲線  $(x, y) = (f(t), g(t))$  ( $0 \leq t \leq T$ ) の長さを求めよ.