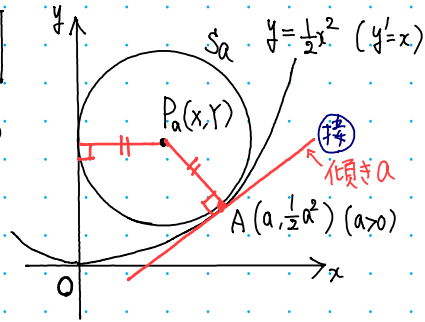


1

(1)



$O(0,0)$, $A(a, \frac{1}{2}a^2)$ ($a>0$),

円 S_a の中心を $P_a(x, y)$ ($x>0, y>0$) とする

円 S_a は y 軸に接するので円の半径は x ← P_a と y 軸の距離

円 S_a は $y = \frac{1}{2}x^2$ ($a, \frac{1}{2}a^2$) で接するので、 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 A における法線
上に P_a はあり、 $|\overrightarrow{AP_a}| = x$

$$\vec{n} = (-a, 1) \text{ と } \vec{AP_a} = \frac{x}{|\vec{n}|} \vec{n} = \frac{x}{\sqrt{a^2+1}} (-a, 1) \quad \leftarrow \vec{AP_a} \parallel \vec{n}$$

$$\overrightarrow{OP_a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_a} = (a, \frac{1}{2}a^2) + \frac{x}{\sqrt{a^2+1}} (-a, 1) = (a - \frac{ax}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{1}{2}a^2 + \frac{x}{\sqrt{a^2+1}})$$

$\overrightarrow{OP_a} = (x, y)$ とおけるから

$$\begin{cases} x = a - \frac{ax}{\sqrt{a^2+1}} & \dots ① \\ y = \frac{1}{2}a^2 + \frac{x}{\sqrt{a^2+1}} & \dots ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ① \text{ より } \frac{\sqrt{a^2+1} + a}{\sqrt{a^2+1}} x &= a \\ \therefore x &= \frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + a} = \frac{a\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1} - a)}{a^2+1 - a^2} = \frac{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}}{1} \end{aligned}$$

$$② \text{ を代入して } y = \frac{1}{2}a^2 + \frac{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{a^2+1} - a^2 = a\sqrt{a^2+1} - \frac{a^2}{2}$$

$$\text{よって } P_a \left(\frac{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}}{1}, a\sqrt{a^2+1} - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\text{円 } S_1 \text{ の中心 } P \text{ は } P_1 \text{ とおけることから } P_1 \left(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$

(2) $P_a(x, y)$ とすると (1) から

$$\begin{cases} x = a^3 + a - a^2\sqrt{a^2+1} \\ y = a\sqrt{a^2+1} - \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

x, y をそれぞれ a で微分して

$$\frac{dx}{da} = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2+1} - a^2 \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{dy}{da} = \sqrt{a^2+1} + a \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}} - a$$

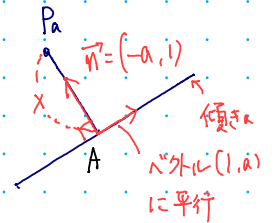
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}}$$

$\frac{dx}{da}$ と $\frac{dy}{da}$ に
 $a=1$ を代入する

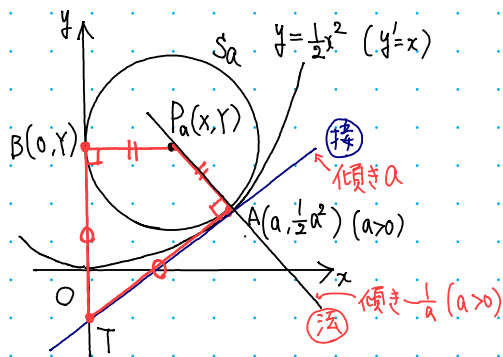
$$\frac{(3-2)(4+5)}{32-25} = \frac{7\sqrt{2}+7}{7}$$

点 P における C の接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ に $a=1$ を代入した値なので

$$\frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{4 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2 + 1 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 4 - 1} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} = \boxed{\sqrt{2} + 1}$$



〔(1)の別解〕(法線ベクトルを使わない)



$y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A(a, \frac{1}{2}a^2)$ における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}(x-a) + \frac{1}{2}a^2$$

$$= -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$$

この法線上に $P(x, Y)$ があろうぞ

$$Y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1 \quad \dots (2)$$

$$AP^2 = (x-a)^2 + (Y - \frac{1}{2}a^2)^2 = (x-a)^2 + (-\frac{x-a}{a})^2 \quad (\because (2))$$

$$= (x-a)^2 + \frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{a^2+1}{a^2}(x-a)^2$$

$(x-a)^2$ の因数
がみえる

円 S_a と y 軸の接点を $B(0, Y)$ とおくと $BP = X$

$PA = PB$ なの $PA^2 = PB^2$ を求めるから $\frac{a^2+1}{a^2}(x-a)^2 = X^2$ すなわち $(a^2+1)(x-a)^2 = a^2X^2$

$0 < X < a$ より $X > 0$ かつ $X-a < 0$ を求めるから $\sqrt{a^2+1}(x-a) = -aX$ ← x と $X-a$ は異符号

$$(\sqrt{a^2+1} + a)X = a\sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore X = \frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + a} = \frac{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + a}$$

③へ代入して $Y = -\frac{1}{a}\{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}\} + \frac{1}{2}a^2 + 1$

$$= -(a^2+1) + a\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}a^2 + 1$$

$$= \underline{a\sqrt{a^2+1} - \frac{a^2}{2}}$$

⑧ $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A(a, \frac{1}{2}a^2)$ における接線の方程式は

$$y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2$$

$$= ax - \frac{1}{2}a^2$$

この接線と y 軸の交点を $T(0, -\frac{1}{2}a^2)$ とおくと $AT = BT$ なの $AT^2 = BT^2$

$$a^2 + a^4 = (Y + \frac{1}{2}a^2)^2$$

$$(Y + \frac{1}{2}a^2)^2 = a^2(a^2+1)$$

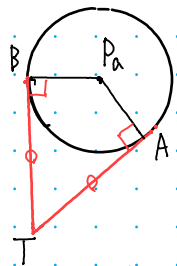
$Y + \frac{1}{2}a^2 > 0$ なの $Y + \frac{1}{2}a^2 = a\sqrt{a^2+1}$

$$Y = \underline{a\sqrt{a^2+1} - \frac{1}{2}a^2}$$

③へ代入して $a\sqrt{a^2+1} - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$

$$\frac{1}{a}x = a^2 + 1 - a\sqrt{a^2+1} \quad \text{2x X}$$

$$\therefore x = \underline{a(a^2+1) - a^2\sqrt{a^2+1}}$$



$$AT^2 = (a-0)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - (-\frac{1}{2}a^2)\right)^2$$

$$= a^2 + (a^2)^2$$

$$BT^2 = Y - (-\frac{1}{2}a^2)$$

$$= Y + \frac{1}{2}a^2$$