5

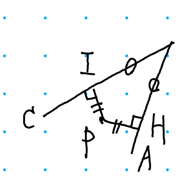
(1) 直線AB, BC に垂線 PH, PI を下ろすと

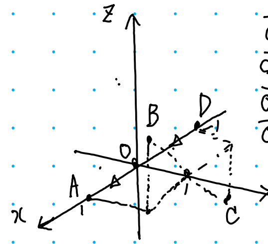
$PH = PI$

であるが

$BH = BI$

と同値である。





$\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$
$\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$
$\overrightarrow{OC}=(-1,1,-1)$
$\overrightarrow{OD}=(-1,0,0)$

すなわち $|\overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BI}| \iff \left|\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|^2}\overrightarrow{BA}\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}\overrightarrow{BC}\right| \iff \dfrac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$

正射影ベクトルの大きさが等しい

ここで

$\overrightarrow{BA}=(0,-1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,0,-2)=-2(-1,0,-1)$

$P(x,y,z)$ として $\overrightarrow{BP}=(x-1,y-1,z-1)$

であるから

$$\frac{|-(y-1)-(z-1)|}{\sqrt{2}} = \frac{2|-(x-1)-(z-1)|}{2\sqrt{2}}$$

$\iff |-y-z+2| = |-x-z+2|$

$\iff -y-z+2=-x-z+2$ または $-y-z+2=-(-x-z+2)$

よって 2直線 AB, BC から等距離にある点全体のなす図形は

$\boxed{\text{平面 } y=x \quad \text{または} \quad \text{平面 } x+y+2z=4}$

$y=x$ …①　$x+y+2z=4$ …②

(2) 点Aと点D, 点Bと点C はそれぞれ y軸に関して対称であるから

2直線 DC, CB から等距離にある点全体のなす図形は (1)で xを$-x$, zを$-z$ にして

平面 $y=-x$ …③ または 平面 $-x+y-2z=4$ …④

点Pが 2直線 DA, ABから等距離にある点全体のなす図形は

$$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

ここで $\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$, $\overrightarrow{AP}=(x-1,y,z)$

$$\frac{|-2(x-1)|}{2} = \frac{|y+z|}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}|x-1|=|y+z| \iff \sqrt{2}(x-1)=\pm(y+z)$$

平面 $\sqrt{2}x-y-z=\sqrt{2}$ …⑤ または $\sqrt{2}x+y+z=\sqrt{2}$ …⑥

②+④ $2y=8$
$y=4$

②−④ $2x+4z=0$
$x=-2z$

4直線 AB, BC, CD, DA に共に接する球面の中心を $Q(a,b,c)$, 半径を r とすると

Q は「①または②」かつ「③または④」かつ「⑤または⑥」上にある

とくに DA が x軸上なので、半径は $r=\sqrt{b^2+c^2}$

あ Qが①かつ③上

のとき $a=b=0$

なので $Q(0,0,c)$

このもとで Qが⑤または⑥上にあるとして

$c=\pm\sqrt{2}$

$\therefore Q(0,0,\pm\sqrt{2})$

$r=\sqrt{2}$

い Qが①かつ④上

のとき $a=b$ かつ $c=-2$

なので $Q(a,a,-2)$

このもとで Qが⑤または⑥上にあるとして

$\sqrt{2}a-a+2=\sqrt{2}$ または $\sqrt{2}a+a-2=\sqrt{2}$

$\iff (\sqrt{2}-1)a=-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ または $(\sqrt{2}+1)a=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

$\therefore a=-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

$\therefore Q(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},-2)$

$r=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$

う Qが②かつ③上

のとき $b=-a$ かつ $c=2$

なので $Q(a,-a,2)$

このもとで Qが⑤または⑥上にあるとして

$\sqrt{2}a+a-2=\sqrt{2}$ または $\sqrt{2}a-a+2=\sqrt{2}$

$\iff (\sqrt{2}+1)a=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ または $(\sqrt{2}-1)a=-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore a=\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$Q(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2},2)$

$r=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$

え Qが②かつ④上

のとき $a=-2c$, $b=4$

なので $Q(-2c,4,c)$

このもとで Qが⑤または⑥上にあるとして

$-2\sqrt{2}c-4-c=\sqrt{2}$

または

$-2\sqrt{2}c+4+c=\sqrt{2}$

$\iff (2\sqrt{2}+1)c=-\sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)$

または $(2\sqrt{2}-1)c=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore c=-\sqrt{2},\sqrt{2}$, $Q(\mp2\sqrt{2},4,\pm\sqrt{2})$

$r=\sqrt{16+2}=3\sqrt{2}$

よって

$$\boxed{\begin{array}{l} 中心\ (0, 0, \pm\sqrt{2}),\ 半径\ \sqrt{2} \\ \quad\quad\quad\quad または \\ 中心\ (0, 0, \pm\sqrt{2}),\ 半径\ \sqrt{6} \\ \quad\quad\quad\quad または \\ 中心\ (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 2),\ 半径\ \sqrt{6} \\ \quad\quad\quad\quad または \\ 中心\ (\mp 2\sqrt{2}, 4, \pm\sqrt{2})\ 半径\ 3\sqrt{2} \\ \quad\quad\quad (すべて複号同順) \end{array}}$$

//