

3

各回目に出た実数を順に a_k, b_k とすると $a_k + b_k i$ は

となり $i, \sqrt{3}i, 1, 1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}, \sqrt{3}+i \dots \textcircled{*}$

$$Z_n = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \cdots (a_n + b_n i)$$

(1) $|Z_n| = |a_1 + b_1 i| |a_2 + b_2 i| \cdots |a_n + b_n i|$ について $|Z_n| < 5$ となる確率を P_n とする

$\textcircled{*}$ の6つの複素数の絶対値は $1, \sqrt{3}, 1, 2, \sqrt{3}, 2$ であり

$|a_k + b_k i| = 1, |a_k + b_k i| = 2, |a_k + b_k i| = \sqrt{3}$ となる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

$|Z_1| < 5$ は必ず成り立つので $P_1 = 1$

$n \geq 2$ のとき $|Z_n| < 5$ となるのは

$ Z_n $	確率
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$	$n C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$	$n C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$	$n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$	$n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$	$n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

← 1か1個

← 1か(n-1)個, 2か1個

← 1か(n-1)個, $\sqrt{3}$ か1個

← 1か(n-2)個, 2か2個

← 1か(n-2)個, $\sqrt{3}$ か2個

← 1か(n-2)個, 2か1個, $\sqrt{3}$ か1個

↑ $n-2$ 個あるの $n \geq 2$ と1つ

$|Z_n| < 5$ となる確率 P_n は上の確率の和であるから

$$P_n = \left\{ 1 + n + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) \right\} \left(\frac{1}{3}\right)^n = (2n^2 + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n=1$ とすると $P_1 = 1$ より $n=1$ のときも成り立つ。

$$P_n = \frac{2n^2 + 1}{3^n}$$

(2) $Z_n^2 = (a_1 + b_1 i)^2 (a_2 + b_2 i)^2 \cdots (a_n + b_n i)^2$ が実数となる確率を Q_n とする

$\textcircled{*}$ の6つの複素数の二乗 $(a_k + b_k i)^2$ について

$$i^2 = -1, (\sqrt{3}i)^2 = -3, 1^2 = 1, (\sqrt{3})^2 = 3, (1+\sqrt{3}i)^2 = 2^2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), (\sqrt{3}+i)^2 = 2^2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$(a_k + b_k i)^2$ が実数である確率は $\frac{2}{3}$, $(a_k + b_k i)^2$ が実数でない確率は $\frac{1}{3}$
(偏角が $\frac{\pi}{3}$ の3の倍数でない整数倍)

$$Q_1 = \frac{2}{3}$$

Z_{n+1} が実数となるのは

「 Z_n が実数かつ $a_{n+1} + b_{n+1} i$ が実数」または「 Z_n が実数でないかつ $a_{n+1} + b_{n+1} i$ が偏角 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ の一方」

$$\text{であるから } Q_{n+1} = \frac{2}{3} Q_n + \frac{1}{3} (1 - Q_n)$$

$$= \frac{1}{2} Q_n + \frac{1}{6}$$

$$\text{変形して } Q_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(Q_n - \frac{1}{3} \right)$$

$$Q_n - \frac{1}{3} = \left(Q_1 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって } Q_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1 \right\}$$

例えば Z_n の偏角が $\frac{\pi}{3}$ ならば $\frac{2\pi}{3}$

