

$$(x^3 - x)^2 (y^3 - y) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \quad \dots \textcircled{*}$$

をみたす整数の組 (x, y) を求める.

$$\leftarrow 86400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 60 \times 60 \times 24$$

1日は 86400 秒

$$f(t) = t^3 - t = (t-1)t(t+1)$$

とする.

$$\{f(x)\}^2 = (x^3 - x)^2 = \{x(x^2 - 1)\}^2 = x^2(x^2 - 1)^2 = |x|^2(|x|^2 - 1)^2 = \{|x|(|x|^2 - 1)\}^2 = \{|x|^3 - |x|\}^2 \\ = \{f(|x|)\}^2$$

$\leftarrow f(x)$ は奇関数なので
 $\{f(x)\}^2$ は偶関数.

$$\textcircled{*} \text{ は } \{f(|x|)\}^2 f(y) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \quad \dots \textcircled{*}$$

$$f(|x|) \neq 0, f(y) \neq 0 \text{ なら } x \neq 0, \pm 1 \text{ かつ } y \neq 0, \pm 1$$

$$\{f(|x|)\}^2 > 0 \text{ であり } f(y) > 0 \text{ となる}$$

$$\therefore \text{このことから } |x| \geq 2, y \geq 2$$

$$f(t) \text{ は } t \geq 2 \text{ で単調増加であり}$$

$\leftarrow t$ が大きくなると

素因数がふえすぎて成り立たなくなる

$$f(2) = 2 \cdot 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$f(5) = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$\leftarrow f(|x|)$ と $f(y)$ の大小で場合分け

$$\textcircled{*} (2 \leq) |x| \leq y \text{ ならば } f(|x|) \leq f(y) \text{ であるから}$$

$$\{f(|x|)\}^3 \leq \{f(|x|)\}^2 f(y) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 < 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^3 = \{f(5)\}^3$$

(①②③)

$$\therefore \text{よって } f(|x|) \leq f(5)$$

$$\therefore |x| = 2, 3, 4$$

$$\textcircled{2} |x| = 2 \text{ かつ } 2 \leq y$$

$$\{f(2)\}^2 = 2^2 \cdot 3^2 \text{ なら } \textcircled{*} \text{ から } f(y) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2900$$

$$f(y) = (y-1)y(y+1)$$

$y-1, y, y+1$ は連続する3つの整数なので、この3つの中に5の倍数は1個しかなく、その1個は5²の倍数

$$f(y) \geq 23 \cdot 24 \cdot 25 > 20 \cdot 20 \cdot 20 > 2000 \text{ なら不適}$$

$$\textcircled{3} |x| = 3 \text{ かつ } 3 \leq y$$

$$\{f(3)\}^2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ なら } \textcircled{*} \text{ から } f(y) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 90$$

$$\textcircled{*} \text{ と同様で } f(y) > 2000 \text{ なら不適}$$

$$\textcircled{4} |x| = 4 \text{ かつ } 4 \leq y$$

$$\{f(4)\}^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \text{ なら } \textcircled{*} \text{ から } f(y) = 2^3 \cdot 3 = 24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$y = 3 \text{ とわかる } 4 \leq y \text{ をみたさず不適}$$

$$\textcircled{11} 2 \leq y \leq |x| \text{ ならば } f(y) \leq f(|x|) \text{ であるから } \textcircled{*} \text{ と同様に}$$

$$\{f(y)\}^3 \leq \{f(|x|)\}^2 f(y) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 < \{f(5)\}^3$$

$$\therefore \text{よって } f(y) \leq f(5)$$

$$\therefore y = 2, 3, 4$$

$$\textcircled{2} y = 2 \text{ かつ } 2 \leq |x|$$

$$\textcircled{*} \text{ から } \{f(|x|)\}^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\therefore f(|x|) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \text{ (} 120 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{)}$$

$$\therefore |x| = 5$$

$$\textcircled{1} y = 3 \text{ かつ } 3 \leq |x|$$

$$\textcircled{*} \text{ から } \{f(|x|)\}^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\therefore f(|x|) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 (= 60 = 3 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$\therefore |x| = 4$$

$$\textcircled{4} y = 4 \text{ かつ } 4 \leq |x|$$

$$\textcircled{*} \text{ から } \{f(|x|)\}^2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\{f(|x|)\}^2 \text{ は素因数を偶数個もたない不適}$$

よって

$$(x, y) = (\pm 4, 3), (\pm 5, 2)$$