

$xyz$  空間において、 $x$  軸を軸とする半径 2 の円柱から、 $|y| < 1$  かつ  $|z| < 1$  で表される角柱の内部を取り除いたものを  $A$  とする。また、 $A$  を  $x$  軸のまわりに  $45^\circ$  回転してから  $z$  のまわりに  $90^\circ$  回転したものを  $B$  とする。 $A$  と  $B$  の共通部分の体積を求めよ。

[2023 東工大 前期]

[ 解答例 ]

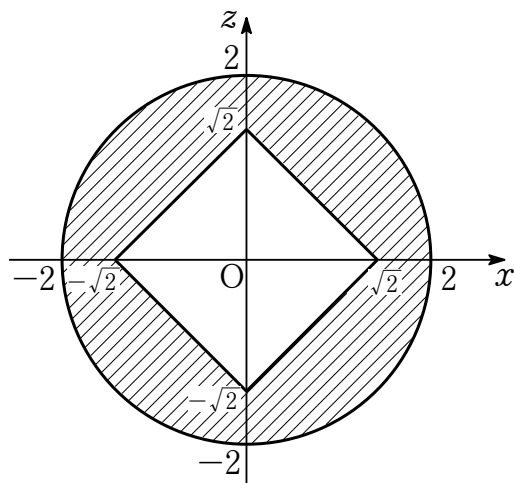
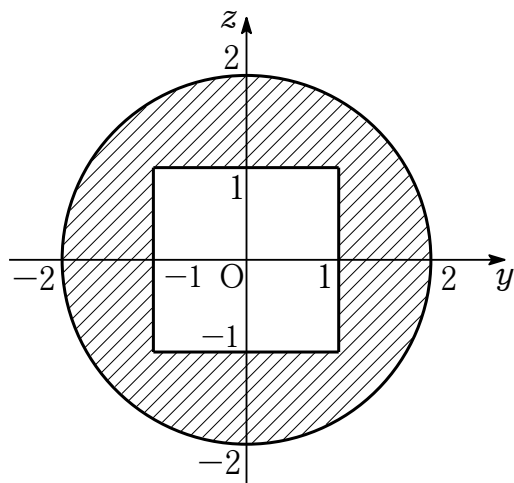
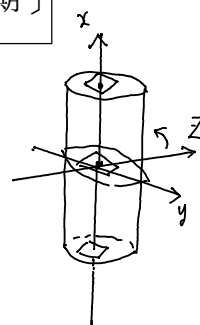
$$A = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq 4, |y| \geq 1 \text{ または } |z| \geq 1\}$$

$A$  を  $x$  軸のまわりに  $45^\circ$  回転してから  $z$  のまわりに  $90^\circ$  回転したものを  $B$  とするので

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 4, |x| + |z| \geq \sqrt{2}\}$$

$A$  の  $yz$  平面に平行な平面における断面を  $yz$  平面に正射影すると下左図になり、

$B$  の  $xz$  平面に平行な平面における断面を  $xz$  平面に正射影すると下右図になる。

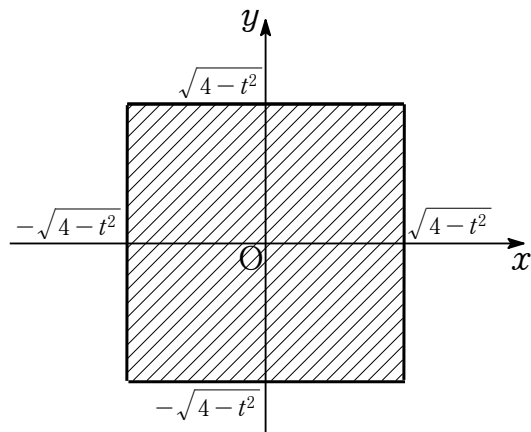


$A$  と  $B$  の共通部分は  $xy$  平面に関して対称であるから  $z \geq 0$  の部分を考える。

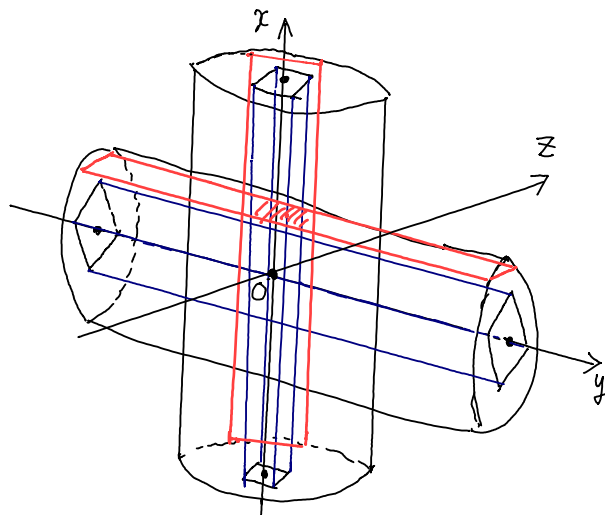
平面  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ) における  $A$  と  $B$  の共通部分の断面積を  $S(t)$  とする。

この断面を  $xy$  平面に正射影した図から、次のように  $S(t)$  は求まる。

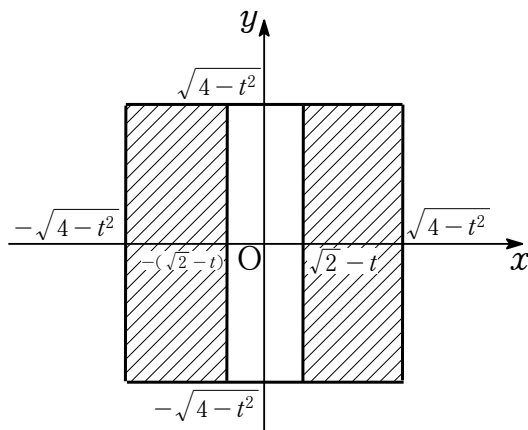
㊸  $\sqrt{2} \leq t \leq 2$  のとき



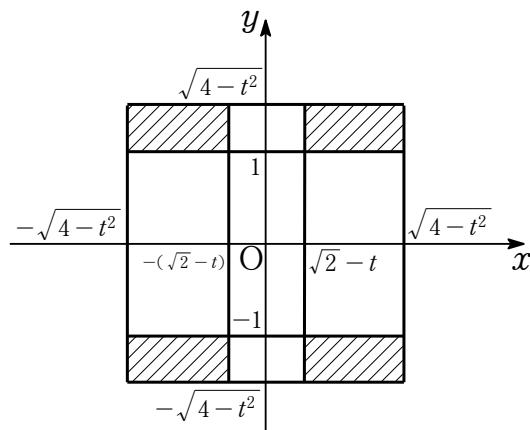
$$S(t) = 4 \times \sqrt{4-t^2} \cdot \sqrt{4-t^2} = 4(4-t^2)$$



④  $1 \leq t \leq \sqrt{2}$  のとき



⑤  $0 \leq t \leq 1$  のとき



$$\begin{aligned} \text{④ } S(t) &= 4 \times \sqrt{4-t^2} \cdot \{\sqrt{4-t^2} - (\sqrt{2}-t)\} \\ &= 4\{(4-t^2) - (\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑤ } S(t) &= 4 \times (\sqrt{4-t^2} - 1) \cdot \{\sqrt{4-t^2} - (\sqrt{2}-t)\} \\ &= 4\{(4-t^2) - (\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2} - \sqrt{4-t^2} + (\sqrt{2}-t)\} \end{aligned}$$

$A$  と  $B$  の共通部分の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^2 S(t) dt \\ &= 2 \cdot 4 \left\{ \int_0^1 \{(4-t^2) - (\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2} - \sqrt{4-t^2} + (\sqrt{2}-t)\} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{\sqrt{2}} \{(4-t^2) - (\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2}\} dt + \int_{\sqrt{2}}^2 (4-t^2) dt \right\} \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{V}{8} = \int_0^2 (4-t^2) dt - \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2} dt - \int_0^1 \sqrt{4-t^2} dt + \int_0^1 (\sqrt{2}-t) dt$$

ここで

$$\int_0^2 (4-t^2) dt = \left[ 4t - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}-t) dt = \left[ \sqrt{2}t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{4-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \frac{16}{3} - \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) + \left( \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{15}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = 60 - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\pi - \frac{8}{3}\pi$$