第７問（選択問題）（配点　16）

α，β，γ を異なる複素数とし，複素数平面上に３点 A(α)，B(β)，C(γ) をとる。直線 AB と直線 AC の関係について考えよう。

以下，複素数の偏角は０以上 2π 未満とする。

(1)　$\alpha = 3 + 2i$，$\beta = 7$，$\gamma = 7 + 10i$ の場合を考える。$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角を求めよう。

$$\gamma - \alpha = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\, i$$

$$\beta - \alpha = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\, i$$

であるから

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\text{オ}}$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ の偏角は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ i	① $1 + i$	② 2	③ $2i$
④ $-i$	⑤ $1 - i$	⑥ -2	⑦ $-2i$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{6}$	② $\dfrac{\pi}{4}$	③ $\dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{\pi}{2}$	⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑥ π	⑦ $\dfrac{5}{4}\pi$
⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$	⑨ $\dfrac{7}{4}\pi$		

（数学Ⅱ，数学B，数学C第７問は次ページに続く。）

(2) $w = \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ とおく。直線ABと直線ACが垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるから

$$w + \overline{w} = \boxed{\text{ク}}$$

である。逆に，$w \neq 0$ に注意すると，$w + \overline{w} = \boxed{\text{ク}}$ のとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるので，直線ABと直線ACが垂直に交わる。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ 0でない実数	① $1 + i$ または $1 - i$
② 純虚数(実部が0である虚数)	③ $-1 + i$ または $-1 - i$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ i
④ $2i$	⑤ -1	⑥ -2	⑦ $-i$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第7問は次ページに続く。)

(3)　z は 0，2，-2 でない複素数とする。

(i)　$\alpha = z$，$\beta = 2$，$\gamma = \dfrac{4}{z}$ とする。直線ABと直線ACが垂直に交わるための条件について考えよう。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\dfrac{4}{z} - z}{2 - z} = 1 + \frac{2}{z}$$

が成り立つので，直線ABと直線ACが垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = \boxed{\text{ク}}$$

である。これは

$$2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{\bar{z}} = \boxed{\text{ク}}$$

と変形できる。さらに，この両辺に $z\bar{z}$ をかけて整理すると，直線ABと直線ACが垂直に交わるための必要十分条件は $\boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。したがって，直線ABと直線ACが垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{コ}}$ である。

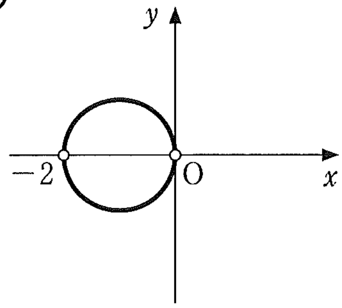
$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $\lvert z\rvert = \lvert z - 4\rvert$	① $\lvert z\rvert = \lvert z - 2\rvert$
② $\lvert z\rvert = \lvert z + 4\rvert$	③ $\lvert z + 1\rvert = \lvert z - 1\rvert$
④ $\lvert z - 1\rvert = 1$	⑤ $\lvert z\rvert = 2$
⑥ $\lvert z + 1\rvert = 1$	⑦ $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$

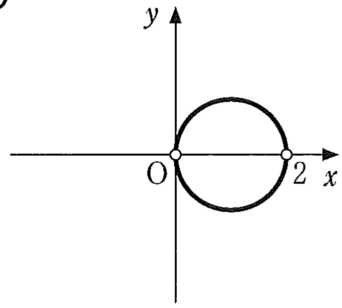
（数学Ⅱ，数学B，数学C第7問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

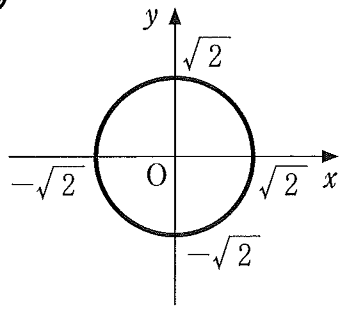
⓪



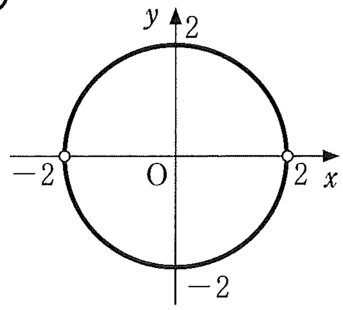
①



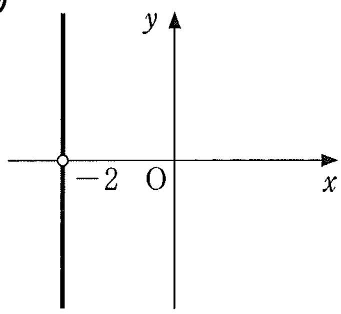
②



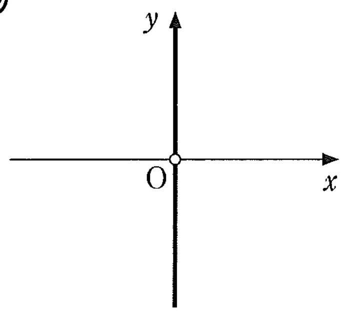
③



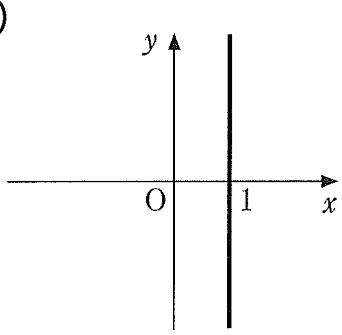
④



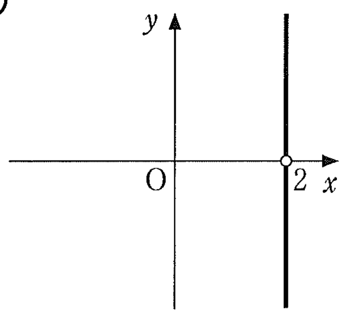
⑤



⑥



⑦



（数学Ⅱ，数学B，数学C第７問は次ページに続く。）

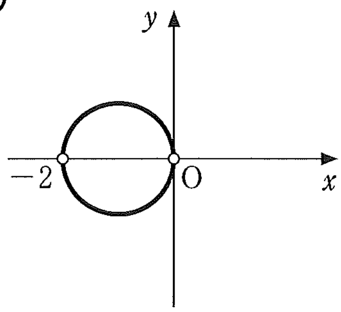
(ii) (i)のα, β, γをそれぞれ-1倍した複素数$\alpha' = -z$, $\beta' = -2$, $\gamma' = -\dfrac{4}{z}$について考える。複素数平面上の異なる3点A$'(\alpha')$, B$'(\beta')$, C$'(\gamma')$について, 直線A$'$B$'$と直線A$'$C$'$が垂直になるような点z全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{サ}}$ である。

(iii) (i)のα, β, γにおけるzを$-z$に置き換え, $\alpha'' = -z$, $\beta'' = 2$, $\gamma'' = -\dfrac{4}{z}$について考える。複素数平面上の異なる3点A$''(\alpha'')$, B$''(\beta'')$, C$''(\gamma'')$について, 直線A$''$B$''$と直線A$''$C$''$が垂直になるような点z全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{シ}}$ である。

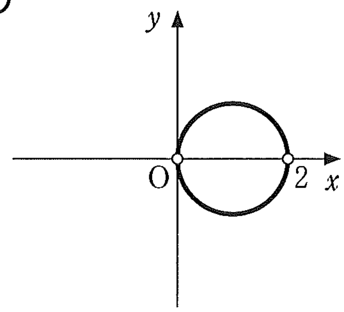
(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

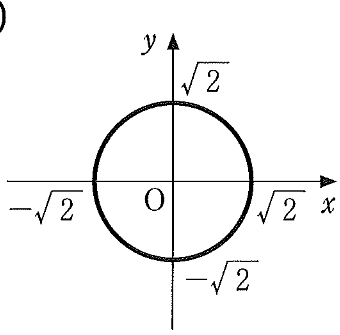
⓪



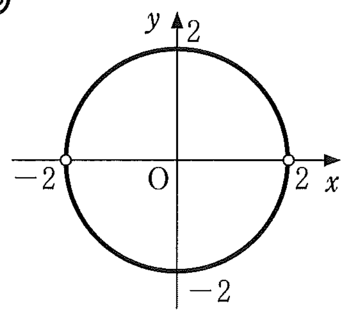
①



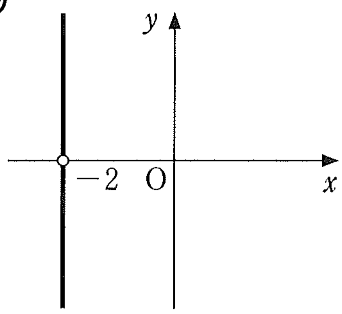
②



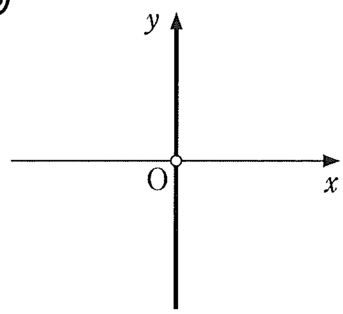
③



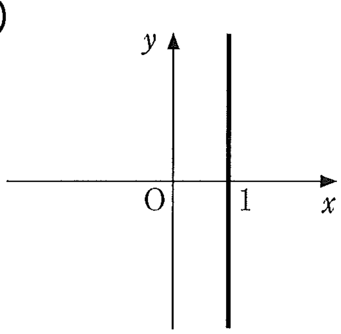
④



⑤



⑥



⑦