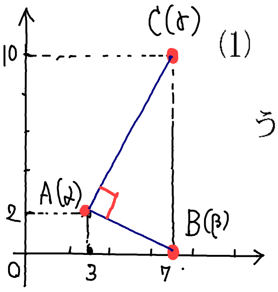
第７問　（選択問題）（配点　16）

α，β，γ を異なる複素数とし，複素数平面上に３点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。直線 AB と直線 AC の関係について考えよう。

以下，複素数の偏角は０以上 2π 未満とする。



(1)　$\alpha = 3 + 2i$，$\beta = 7$，$\gamma = 7 + 10i$ の場合を考える。$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角を求めよう。

$$\gamma - \alpha = \boxed{\;4\;}_{ア} + \boxed{\;8\;}_{イ}\, i$$

$$\beta - \alpha = \boxed{\;4\;}_{ウ} - \boxed{\;2\;}_{エ}\, i$$

（ア，イ，ウ，エで２点）

であるから

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\;2i\;}$$　③オ（２点）

であり，$\boxed{2i}$ の偏角は $\boxed{④}$ である。

$\frac{\pi}{2}$　カ（２点）

$\gamma - \alpha = 7 + 10i - (3 + 2i)$
$= \boxed{4 + 8i}$　ア，イ

$\beta - \alpha = 7 - (3 + 2i)$
$= \boxed{4 - 2i}$　ウ，エ

$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \dfrac{4(1+2i)}{2(2-i)} = \dfrac{2(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$= \dfrac{2 \cdot 5i}{5}$
$= \boxed{2i}$　③オ

$\arg\left(\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$　④カ

$\boxed{オ}$ の解答群

⓪　i	①　$1 + i$	②　2	③　$2i$
④　$-i$	⑤　$1 - i$	⑥　-2	⑦　$-2i$

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪　0	①　$\dfrac{\pi}{6}$	②　$\dfrac{\pi}{4}$	③　$\dfrac{\pi}{3}$
④　$\dfrac{\pi}{2}$	⑤　$\dfrac{3}{4}\pi$	⑥　π	⑦　$\dfrac{5}{4}\pi$
⑧　$\dfrac{3}{2}\pi$	⑨　$\dfrac{7}{4}\pi$		

(2)　$w=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき，w は $\boxed{\text{キ}}$（純虚数　②）であるから

$$w+\overline{w}=\boxed{\text{ク}}\ (0)$$

⓪ク　(キ,クで2点)

である。逆に，$w \neq 0$ に注意すると，$w+\overline{w}=\boxed{\text{ク}}$ (0) のとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ (純虚数) であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

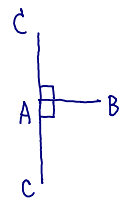
$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪　0 でない実数	①　$1+i$　または　$1-i$
②　純虚数（実部が 0 である虚数）	③　$-1+i$　または　$-1-i$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪　0	①　1	②　2	③　i
④　$2i$	⑤　-1	⑥　-2	⑦　$-i$

AB ⊥ AC　となるのは　$\arg w=\frac{\pi}{2}$　または　$\arg w=\frac{3}{2}\pi$



このとき

w は $\boxed{\text{純虚数}}$　②キ

であるから

$w+\overline{w}=\boxed{0}$　⓪ク

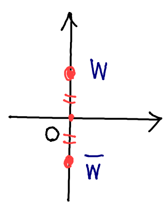
補　$w=|w|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ （$\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$）

$=|w|\,i$

または

$w=|w|\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ （$\cos\frac{3}{2}\pi=0$，$\sin\frac{3}{2}\pi=-1$）

$=-|w|\,i$



数学Ⅱ，数学B，数学C

(3) z は 0，2，-2 でない複素数とする。

(i) $\alpha = z$, $\beta = 2$, $\gamma = \dfrac{4}{z}$ とする。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件について考えよう。

$$\frac{\frac{4-z^2}{z}}{2-z} = \frac{\cancel{(2-z)}(2+z)}{z\cancel{(2-z)}} = \frac{2+z}{z} = \frac{2}{z} + 1$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z}} = 1 + \frac{2}{z}$$

が成り立つので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \underbrace{\overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)}}_{1+\frac{2}{\bar{z}}} = \boxed{0}$$

ク

両辺を2でわって $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 0$

両辺に $z\bar{z}$ をかけて $z \cdot \bar{z} + \bar{z} + z = 0$

$(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

$(z+1)\overline{(z+1)} = 1$

$|z+1|^2 = 1$

$\therefore |z+1| = 1$

である。これは

$$2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{\bar{z}} = \boxed{0}$$

ク

と変形できる。さらに，この両辺に $z\bar{z}$ をかけて整理すると，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\boxed{6}$ ($|z+1| = 1$) ケ (2点) であることがわかる。したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{0}$ コ (2点) である。

⓪ コ

点 z は中心が -1，半径が 1 の円を表す。ただし，2点 -2, 0 はのぞく。

$z \neq -2, 0$

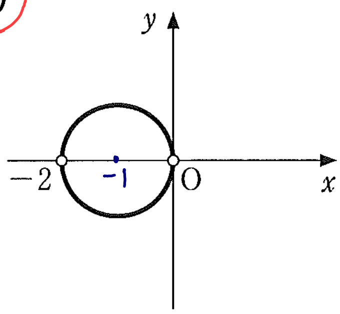
よって図示すると ⓪ コ

ケ の解答群

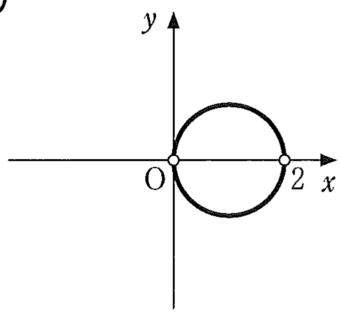
⓪ $\lvert z \rvert = \lvert z-4 \rvert$	① $\lvert z \rvert = \lvert z-2 \rvert$
② $\lvert z \rvert = \lvert z+4 \rvert$	③ $\lvert z+1 \rvert = \lvert z-1 \rvert$
④ $\lvert z-1 \rvert = 1$	⑤ $\lvert z \rvert = 2$
⑥ $\lvert z+1 \rvert = 1$	⑦ $\lvert z \rvert = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

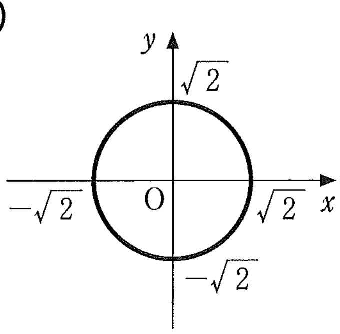
⓪



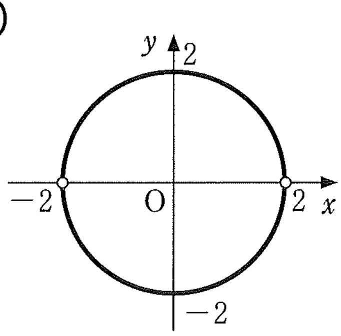
①



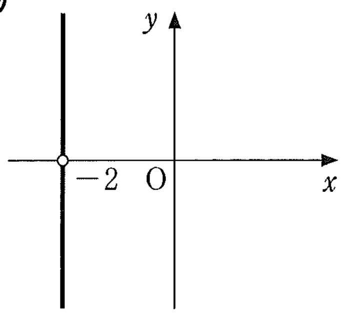
②



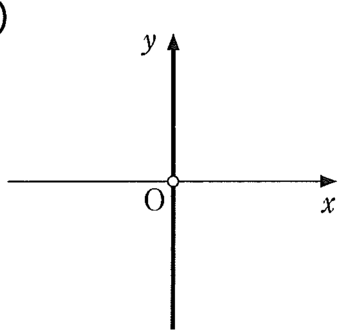
③



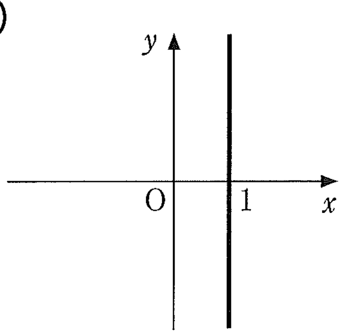
④



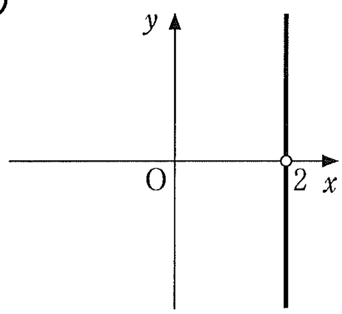
⑤



⑥



⑦



数学Ⅱ，数学B，数学C

$\alpha=z,\ \beta=2,\ \gamma=\frac{4}{z}$

(ii)　(i)の α，β，γ をそれぞれ -1 倍した複素数 $\alpha'=-z$，$\beta'=-2$，$\gamma'=-\frac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる3点 A′(α')，B′(β')，C′(γ') について，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{0}$ である。

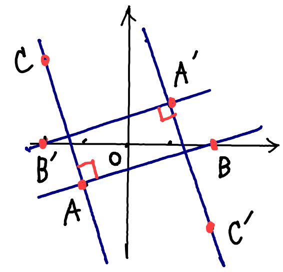
サ(2点)

(iii)　(i)の α，β，γ における z を $-z$ に置き換え，$\alpha''=-z$，$\beta''=2$，$\gamma''=-\frac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる3点 A″(α'')，B″(β'')，C″(γ'') について，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{1}$ である。

シ(2点)

(ii)　$\alpha'=-\alpha$，$\beta'=-\beta$，$\gamma'=-\gamma$ とすると 3点 A(α)，B(β)，C(γ) をそれぞれ原点Oに関して対称移動したものが A′(α') B′(β') γ'(γ') となる。

ゆえに A′B′⊥A′C′ ならば AB⊥AC であり，逆も言える



よって　$|z+1|=1$　$(z\neq -2, 0)$　← (i)と同じ条件

図示すると $\boxed{0}$ サ

補　$\dfrac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\dfrac{-\gamma+\alpha}{-\beta+\alpha}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数であることと $\dfrac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}$ が純虚数であることは同値

(iii)　(i) の z を $-z$ に置きかえ　$\alpha''=-z$，$\beta''=2$，$\gamma''=\frac{4}{-z}$ とする。

3点 A″(α'')，B″(β'')，C″(γ'') について A″B″⊥A″C″ となる条件は

(i)で z を $-z$ にして

$|-z+1|=1$　$(-z\neq -2, 0)$　← (i)の円を原点対称した円

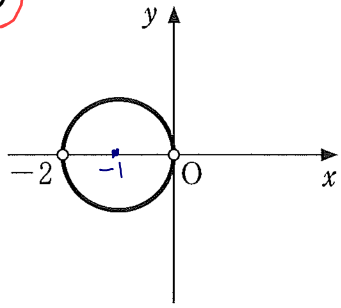
すなわち　$|z-1|=1$　$(z\neq 0, 2)$

よって 中心が 1，半径が 1 の円，ただし点 0, 2 はのぞくことから

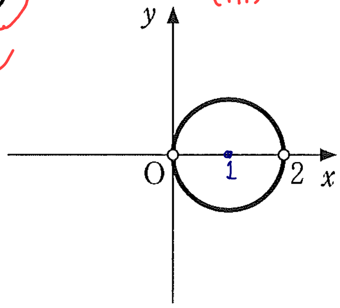
図示すると $\boxed{1}$ シ

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

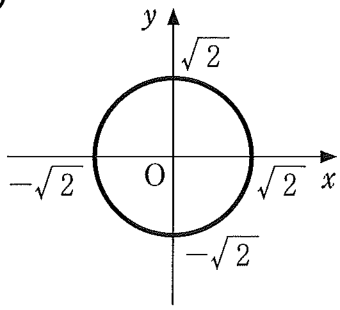
⓪ (ii)
サ



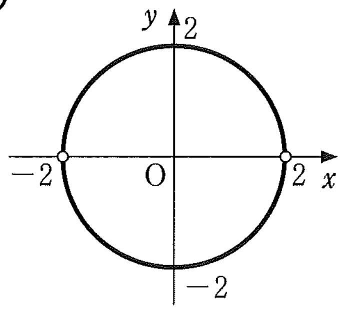
① (iii)
シ



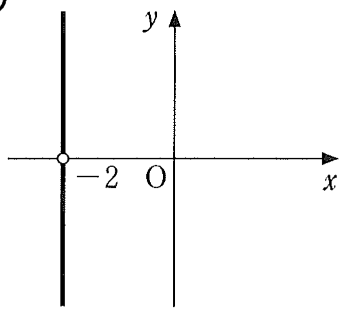
②



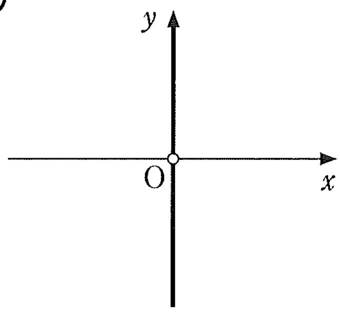
③



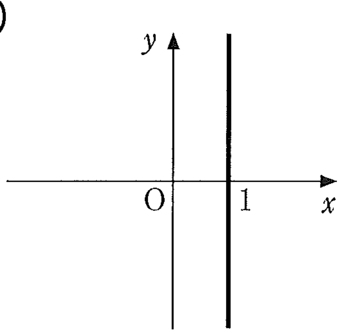
④



⑤



⑥



⑦