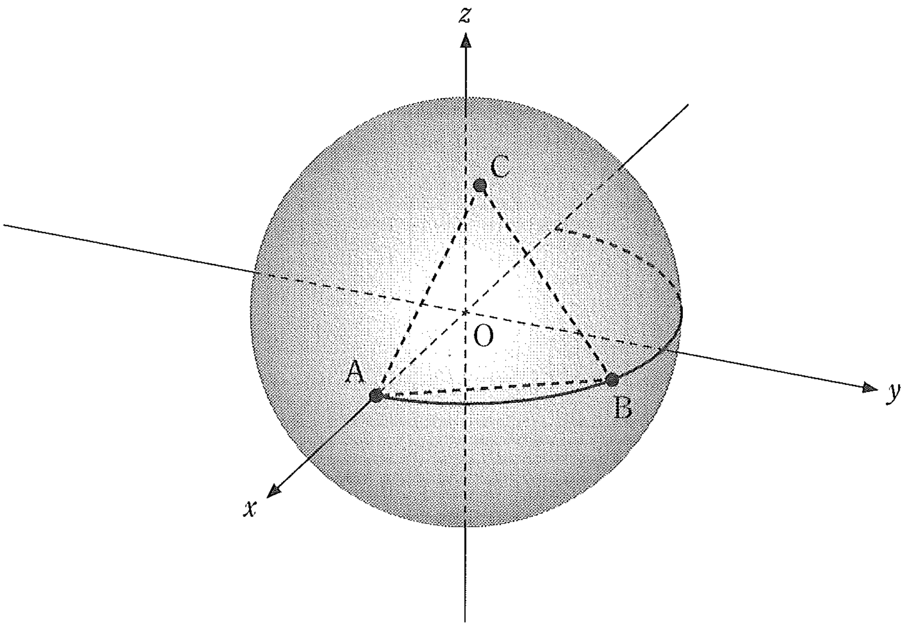
第6問 （選択問題）（配点　16）

Oを原点とする座標空間において，Oを中心とする半径1の球面をSとする。S上に二つの点A(1, 0, 0)，B(a, $\sqrt{1-a^2}$, 0)をとる。ただし，aは$-1 < a < 1$を満たす実数とする。S上の点Cを，△ABCが正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



参考図

(1)　点Cの座標を(x, y, z)とする。CがS上にあるとき

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{\text{ア}}$$

である。これをベクトル$\overrightarrow{OC}$の成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\text{ア}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。）

さらに，△ABCが正三角形であるとする。△OACと△OABは，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x=\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。同様に△OBCと△OABも合同であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}x+\boxed{\text{オ}}y=\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ③$$

となる。

逆に，実数 x, y, z が①，②，③を満たすとき，C$(x,\ y,\ z)$は S 上の点であり，△ABCは正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
③ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2$	④ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$	⑤ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ a	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。)

(2) a に具体的な値を代入して，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i) $a = \dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

$$x = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad y = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。この x，y に対して，① を満たす実数 z は $\boxed{\text{サ}}$。したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{サ}}$。

(ii) $a = -\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう。(i) と同様に考えると，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{シ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ない	① ちょうど一つある	② ちょうど二つある
③ ちょうど三つある	④ ちょうど四つある	⑤ 無限に多くある

（数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。）

(3) △ABCが正三角形となる S 上の点Cがあるための，a に関する条件を見つけよう。

実数 x，y，z は，①，②，③ を満たすとする。② と ③ から

$$x = \boxed{ウ}, \qquad y = \frac{\boxed{ウ}\left(1 - \boxed{エ}\right)}{\boxed{オ}}$$

である。このとき，① から

$$z^2 = \boxed{ア} - x^2 - y^2 = \frac{\boxed{ス}}{1 + a}$$

となる。さらに，$z^2 \geqq 0$，$1 + a > 0$ であるから $\boxed{ス} \geqq 0$ である。

逆に，$\boxed{ス} \geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

以上のことから，$\boxed{セ}$ は，△ABCが正三角形となる S 上の点Cがあるための必要十分条件である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $1 - 2a$	① $(1 - a)^2$
② $(1 + 2a)^2$	③ $(1 + 2a)(1 - a)$
④ $(1 - 2a)(1 - a)$	⑤ $(1 - 2a^2)(1 + 2a)$
⑥ $(1 + 2a^2)(1 - a)$	⑦ $(1 - 2a^2)(1 - a)$

$\boxed{セ}$ の解答群

⓪ $-1 < a < 1$	① $-1 < a \leqq \frac{1}{2}$	② $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$
③ $-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$	④ $-\frac{1}{2} \leqq a < 1$	⑤ $\frac{1}{2} \leqq a < 1$
⑥ $-1 < a \leqq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leqq a < 1$		
⑦ $-1 < a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a < 1$		