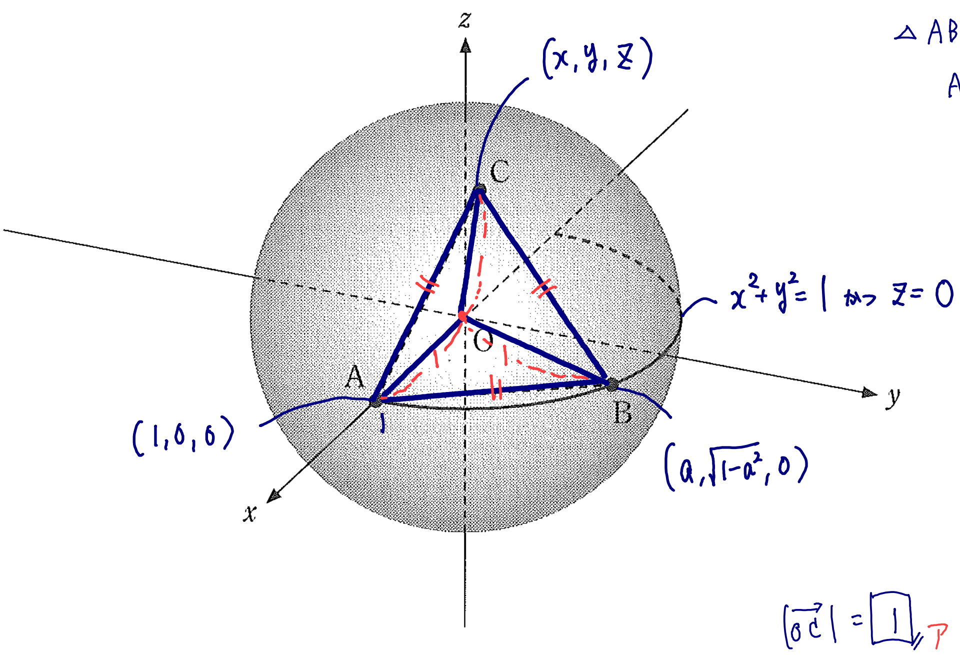
第６問　（選択問題）（配点　16）

Oを原点とする座標空間において，Oを中心とする半径1の球面をSとする。S上に二つの点A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)$をとる。ただし，aは$-1 < a < 1$を満たす実数とする。S上の点Cを，△ABCが正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。

3点A,B,Cは球面S上より
OA=OB=OC=1
△ABCが正三角形となるのは
AB=BC=CA



参考図

$|\overrightarrow{OC}| = \boxed{1}$ ア ← 球の半径
$|\overrightarrow{OC}|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$ …①

(1)　点Cの座標を$(x,\ y,\ z)$とする。CがS上にあるとき

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{\ 1\ }$$ ア(1点)

である。これをベクトル$\overrightarrow{OC}$の成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\ 1\ } \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
ア

となる。

原点Oが中心，半径が1の球面の方程式

さらに，△ABC が正三角形であるとする。△OAC と △OAB は，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}$$ ④イ（2点）

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x = \boxed{a}$$ ⓪ウ ……………………………… ②

となる。同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}$$ イ

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

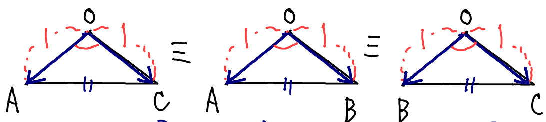
$$\boxed{a}\,x + \boxed{\sqrt{1-a^2}}\,y = \boxed{a}$$ ……………………………… ③

⓪エ　⑤オ　ウ　（ウ，エ，オで3点）

となる。

逆に，実数 x，y，z が ①，②，③ を満たすとき，C(x, y, z) は S 上の点であり，△ABC は正三角形になっていることがわかる。

△OAC ≡ △OAB ≡ △OBC（3辺の長さが等しい）



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ $\boxed{④}$ イ

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$
$\overrightarrow{OB} = (a, \sqrt{1-a^2}, 0)$
$\overrightarrow{OC} = (x, y, z)$

より
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = x$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = a$
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = ax + \sqrt{1-a^2}\,y$

よって $\boxed{x = a}$ ⓪ウ …②

$\boxed{ax + \sqrt{1-a^2}\,y = a}$ …③

⓪エ　⑤オ

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
③ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2$	④ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$	⑤ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ a ウ，エ	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	オ ⑤ $\sqrt{1-a^2}$

数学Ⅱ，数学B，数学C

(2)　a に具体的な値を代入して，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

$$x=\frac{\boxed{3}\ カ}{\boxed{5}\ キ},\qquad y=\frac{\boxed{3}\ ク}{\boxed{10}\ ケコ}\quad (2点)$$

である。このx，yに対して，① を満たす実数 z は $\boxed{②}$ ちょうど二つある サ (2点)。したがって，

△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{}$ サ。 ちょうど二つある

(ii)　$a=-\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう。(i)と同様に考えると，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{ない}$ ことがわかる。 ⓪ シ (2点)

$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ない シ	① ちょうど一つある	② ちょうど二つある サ
③ ちょうど三つある	④ ちょうど四つある	⑤ 無限に多くある

(i) $a=\frac{3}{5}$ のとき

② は $x=\boxed{\frac{3}{5}}$ カ キ …②'

③ は $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{3}{5}$ …③'

②' を ③' へ代入して

$\frac{9}{25}+\frac{4}{5}y=\frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}y=\frac{6}{25}$

$\therefore\ y=\boxed{\frac{3}{10}}$ ク ケコ

① から $z^2=1-x^2-y^2$

$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{100-36-9}{100}=\frac{55}{100}$

$\therefore\ z=\pm\frac{\sqrt{55}}{10}$

① をみたす実数 z はちょうど2つある $\boxed{2}$ サ

△ABC が正三角形となる S 上の点Cは $\left(\frac{3}{5},\ \frac{3}{10},\ \pm\frac{\sqrt{55}}{10}\right)$ の2つ

(ii) $a=-\frac{3}{5}$ のとき

② は $x=-\frac{3}{5}$ …②'

③ は $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=-\frac{3}{5}$ …③'

②' を ③' へ代入して

$\frac{9}{25}+\frac{4}{5}y=-\frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}y=\frac{-24}{25}$

$\therefore\ y=-\frac{6}{5}$ <-1

$-1\leqq y\leqq 1$ であるから 実数 y は存在しない

よって S 上の点 C はない $\boxed{0}$ シ

(3) △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を見つけよう。

実数 x，y，z は，①，②，③ を満たすとする。② と ③ から

$$x = \underset{ウ}{\boxed{a}}, \qquad y = \frac{\overset{ウ}{\boxed{a}}\left(1 - \overset{エ}{\boxed{a}}\right)}{\underset{オ}{\boxed{\sqrt{1-a^2}}}}$$

である。このとき，① から

$$z^2 = \underset{ア}{\boxed{1}} - x^2 - y^2 = \frac{\boxed{(1+2a)(1-a)}}{1+a}$$ ③ス(2点)

となる。さらに，$z^2 \geqq 0$，$1 + a > 0$ であるから $\underset{ス}{\boxed{(1+2a)(1-a)}} \geqq 0$ である。

逆に，$\underset{ス}{\boxed{(1+2a)(1-a)}} \geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

$-\frac{1}{2} \leqq a < 1$

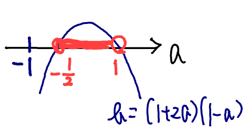
以上のことから，$\boxed{④}$ は，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。セ(2点)

②，③から
$x = a$，$y = \dfrac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$

①から
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - a^2 - \frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2} = (1-a)(1+a) - \frac{a^2\cancel{(1-a)^2}^{\,1-a}}{\cancel{(1-a)}(1+a)} = \frac{1-a}{1+a}\left\{(1+a)^2 - a^2\right\} = \boxed{\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}}$$ ③ス

実数 z が存在する

$z^2 \geqq 0$
$1 + a > 0$
であるから
$(1+2a)(1-a) \geqq 0$
$\therefore -\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$



$-1 < a < 1$ であるから

$\boxed{-\frac{1}{2} \leqq a < 1}$ ④セ

(2)の(ii) $a = -\frac{3}{5}$ がみたさないことも確認できる

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $1 - 2a$	① $(1 - a)^2$
② $(1 + 2a)^2$	③ $(1 + 2a)(1 - a)$
④ $(1 - 2a)(1 - a)$	⑤ $(1 - 2a^2)(1 + 2a)$
⑥ $(1 + 2a^2)(1 - a)$	⑦ $(1 - 2a^2)(1 - a)$

$\boxed{セ}$ の解答群

⓪ $-1 < a < 1$　① $-1 < a \leqq \frac{1}{2}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{2} \leqq a < 1$　⑤ $\frac{1}{2} \leqq a < 1$

⑥ $-1 < a \leqq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leqq a < 1$

⑦ $-1 < a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a < 1$