第5問　（選択問題）（配点　16）

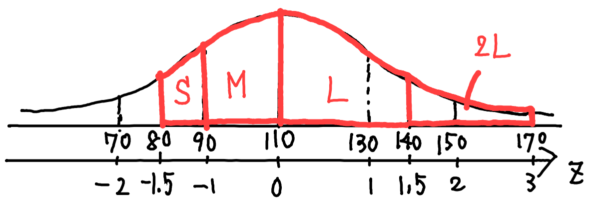
以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて31ページの正規分布表を用いてもよい。

Q地域ではレモンを栽培しており，収穫されるレモンを重さによってサイズごとに分類している（表1）。過去に収穫されたレモンの重さは，平均が110 g，標準偏差が20 gの正規分布に従うとする。

表1　レモンのサイズと重さの対応関係

サイズ	レモン1個の重さ
S	80 g以上90 g未満
M	90 g以上110 g未満
L	110 g以上140 g未満
2 L	140 g以上170 g未満
その他	80 g未満または170 g以上

補　$N(110, 20^2)$に従うので，下図のイメージになる



(1)　Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ(単位は g)は，過去に収穫されたレモンの重さと同じ分布に従うとする。すなわち，今年収穫される 1 個のレモンの重さを確率変数 X で表すと，X は正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うとする。よって，今年収穫されるレモンから無作為にレモンを 1 個抽出するとき，そのレモンが L サイズである確率は，$P(110 \leqq X < 140) = P(110 \leqq X \leqq 140)$ であることに注意すると，0. $\boxed{4332}$ である。
アイウエ (2点)

　いま，Q 地域で今年収穫されるレモンが 20 万個であるとし，その中の L サイズのレモンの個数を確率変数 Y で表すと，Y は二項分布に従い，Y の平均(期待値)は $\boxed{86640}$ となる。
オ(2点)

$\boxed{オ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ 13100	① 13360	② 31740	③ 68260
④ 86640	⑤ 100000	⑥ 168260	⑦ 186640

X は $N(110, 20^2)$ に従うので

$Z = \dfrac{X-110}{20}$

とおくと

Z は $N(0,1)$ に従う

$P(110 \leqq X \leqq 140) = P(0 \leqq Z \leqq 1.5)$ ∂ 正規分布表

$= \boxed{0.4332}$ アイウエ

$p = 0.4332$

とおくと

Y は $B(2\cdot 10^5,\ p)$ に従うので Y の平均は

$2\cdot 10^5 \times p = 2\cdot 10^5 \cdot 0.4332$

$= 20 \cdot 4332$

$= \boxed{86640}$ ④オ

おまけ　L サイズ以外の確率も求めてみた

S サイズである確率は

$P(80 \leqq X \leqq 90) = P(-1.5 \leqq Z \leqq -1)$

$= P(1 \leqq Z \leqq 1.5)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.5) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4332 - 0.3413$

$= 0.0919$

M サイズである確率は

$P(90 \leqq X \leqq 110) = P(-1 \leqq Z \leqq 0)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.3413$

2L サイズである確率は

$P(140 \leqq X \leqq 170) = P(1.5 \leqq Z \leqq 3)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 3) - P(0 \leqq Z \leqq 1.5)$

$= 0.4987 - 0.4332$

$= 0.0655$

その他のサイズである確率は

$1 - P(80 \leqq X \leqq 170) = 1 - 0.9319$

$= 0.0681$

(2) 太郎さんと花子さんは，Q 地域で今年収穫されるレモンから何個かを抽出して，今年収穫されるレモンの重さの平均(母平均)を推定する方法について話している。

> 太郎：母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にして推定したいね。
>
> 花子：母標準偏差を過去と同じ 20 g とすると，何個のレモンの重さを量ればいいかな。
>
> 太郎：信頼区間の式から，必要な標本の大きさを求めてみようよ。

$\overline{W}=\frac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$
は
平均 $E(\overline{W})=\frac{1}{n}\cdot nm$
$=m$
分散 $V(\overline{W})=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2$
$=\frac{\sigma^2}{n}$
$\overline{W}$ は $\boxed{N\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)}$
に従う ⑥カ

母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさを求める。いま，Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし，その重さの母平均を m g，母標準偏差を σ g とする。この母集団から無作為に抽出した n 個のレモンの重さを確率変数 W_1，W_2，…，W_n で表すと，標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}=\frac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \boxed{⑥}\right)$ に従う。また，m に対する信頼度 95 % の信頼区間を $A \leqq m \leqq B$ と表すと，信頼区間の幅は $B-A=\dfrac{\boxed{3.92\sigma}}{\sqrt{n}}$ となる。

$\frac{\sigma^2}{n}$ カ(1点)　⑤キ

$\underbrace{\overline{W}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{A} \leqq m \leqq \underbrace{\overline{W}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{B}$

$B-A=2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$=\boxed{\frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}}$ ⑤キ

$\sigma=20$ として
$B-A\leqq 4$
とすると
$\frac{3.92\times\cancel{20}^{\,5}}{\sqrt{n}}\leqq\cancel{4}$
$3.92\cdot5\leqq\sqrt{n}$
$19.6\leqq\sqrt{n}$
2乗に
$(19.6)^2\leqq n$
$384.16\leqq n$
これをみたす最小の自然数を n_0 とすると $n_0=\boxed{385}$ ケコサ

したがって，母標準偏差を過去と同じ $\sigma=20$ として，n に関する不等式

$$\frac{\boxed{3.92\sigma}}{\sqrt{n}} \leqq 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

キ

を満たす自然数 n を求めればよい。① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると，$\left(\boxed{3.92\sigma}\right)^2 \leqq 16n$ となる。この不等式を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると，$n_0=\boxed{385}$ である。ゆえに，m に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさ n のうち，最小のものは $\boxed{385}$ であることがわかる。

キ　クケコ(3点)

$$\begin{array}{r} 19.6 \\ \times\ 19.6 \\ \hline 1176 \\ 1764\ \ \\ +\ 196\ \ \ \ \\ \hline 384.16 \end{array}$$

補 まともに計算したけど，次がよかったかも
$(19.6)^2=(20-0.4)^2$
$=400-16+0.16$
$=384+0.16$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ σ	① $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	② $\dfrac{\sqrt{\sigma}}{n}$	③ $\dfrac{\sigma}{n}$
④ σ^2	⑤ $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$	⑥ $\dfrac{\sigma^2}{n}$	⑦ $\dfrac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ σ	① 1.65σ	② 1.96σ
③ 2σ	④ 3.3σ	⑤ 3.92σ

(3)　太郎さんと花子さんは，Q地域で今年収穫されるレモンの重さについて話している。

太郎：今年のレモンの重さは，他の地域では例年よりも軽そうだと聞いたよ。

花子：Q地域でも，過去の平均 110 g と比べて軽いのかな。

太郎：標本の大きさを 400，母標準偏差を過去と同じ 20 g として，仮説検定をしてみようよ。

(2)の m を用いて，Q地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均 m g が過去の平均 110 g より軽いといえるかを，有意水準 5 %(0.05)で仮説検定を行い検証したい。ただし，標本の大きさは 400，母標準偏差は過去と同じ 20 g とする。ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき，帰無仮説は「$m = 110$」，対立仮説は「$\boxed{m<100}$」である。これらの仮説に対して，有意水準 5 % で帰無仮説が棄却(否定)されるかどうかを判断する。

⓪サ（1点）

いま，帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので，(2)の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $\boxed{N(110,1)}$ に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2 g となった。このとき，確率 $P(\overline{W} \leqq 108.2)$ は 0.$\boxed{0359}$ となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5 %より $\boxed{①}$。したがって，有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと $\boxed{⓪}$。

⑤シ（1点）

スセソタ（2点）

チ　小さいから，帰無仮説は棄却される

ツ　判断できる（チ，ツで2点）

片側検定

↓

帰無仮説 H_0「$m=110$」

対立仮説 H_1「$m<110$」

H_0 が正しいと仮定すると

標本の大きさ $400 = n$

標本平均 $110 = m$

標本標準偏差

$\dfrac{20}{\sqrt{400}} = \dfrac{20}{20} = 1$　$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　$\sigma = 20$

$\overline{W}$ は $N(110,1)$ に従う　⑤シ

$Z = \overline{W} - 100$

とすると Z は $N(0,1)$ に従う

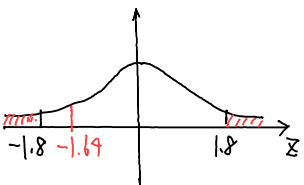
$$P(\overline{W} \leqq 108.2) = P(Z \leqq -1.8) = P(1.8 \leqq Z)$$
$$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.8)$$
$$= 0.5 - 0.4641$$
$$= \boxed{0.0359} < 0.05$$

スセソタ　(3.59 %)　(5 %)

有意水準 5% より小さいから H_0 は棄却される　$\boxed{⓪}$ チ

よって H_1 は正しいと判断できるので

母平均は 110g より軽いと判断できる　$\boxed{⓪}$ ツ



(補) 棄却域は $P(Z \leqq -1.64)$ で $Z = -1.8$ は入っている

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ $m < 110$	① $m \leqq 110$	② $m = 110$
③ $m \geqq 110$	④ $m > 110$	

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $N(108.2,\ 400)$	① $N(108.2,\ 20)$	② $N(108.2,\ 1)$
③ $N(110,\ 400)$	④ $N(110,\ 20)$	⑤ $N(110,\ 1)$

$\boxed{チ}$ の解答群

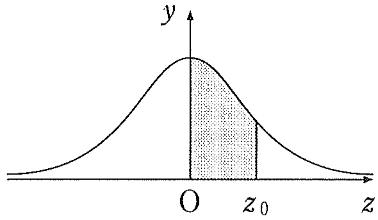
⓪ 小さいから，帰無仮説は棄却されない
① 小さいから，帰無仮説は棄却される
② 大きいから，帰無仮説は棄却されない
③ 大きいから，帰無仮説は棄却される

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ 判断できる	① 判断できない

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998