第4問 （選択問題）（配点　16）

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。ただし，図形の内部は，境界（境界線）を含まないものとする。

例えば，直線 $y=-x+5$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を S とする。S は図1の灰色部分であり，S の内部にある格子点を黒丸，内部にない格子点を白丸で表している。したがって，S の内部にある格子点の個数は6である。

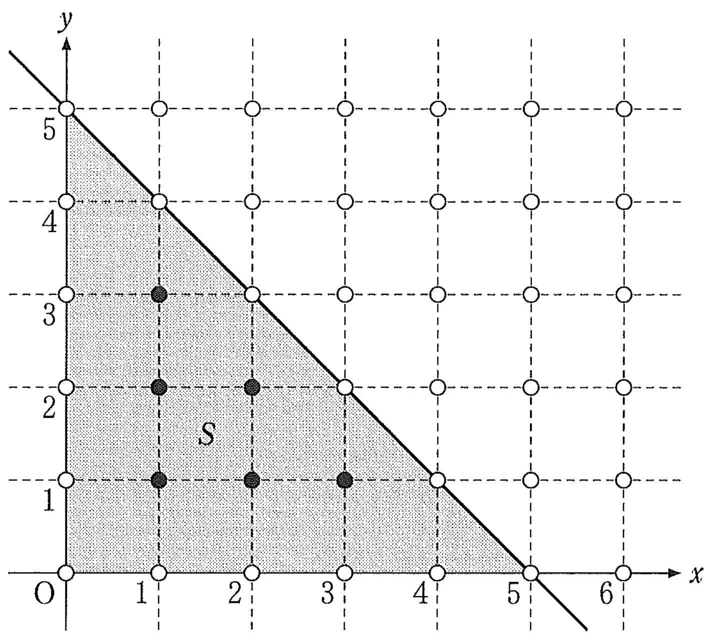


図　1

(1)　直線 $y = 3x$ と x 軸，直線 $x = 21$ で囲まれた図形を T とする。T の内部にある格子点の個数を考える。

直線 $x = 1$ 上の格子点で T の内部にあるものは，点$(1, 1)$と点$(1, 2)$の2個である。点$(1, 0)$と点$(1, 3)$は T の境界にあるため，内部にはない。

n を整数とする。直線 $x = n$ が T の内部にある格子点を通るのは，$1 \leqq n \leqq 20$ のときである。$1 \leqq n \leqq 20$ のとき，直線 $x = n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数を a_n とおく。$a_1 = 2$ であり，$a_2 =$ $\boxed{5}$ ア，$a_3 =$ $\boxed{8}$ イ である。(ア,イで2点)

数列$\{a_n\}$は $\boxed{公差}$ ⓪ウ が $\boxed{3}$ エ の $\boxed{等差}$ ⓪オ 数列である。(ウ,エ,オで2点)

したがって，T の内部にある格子点の個数は $\boxed{610}$ カキク である。(3点)

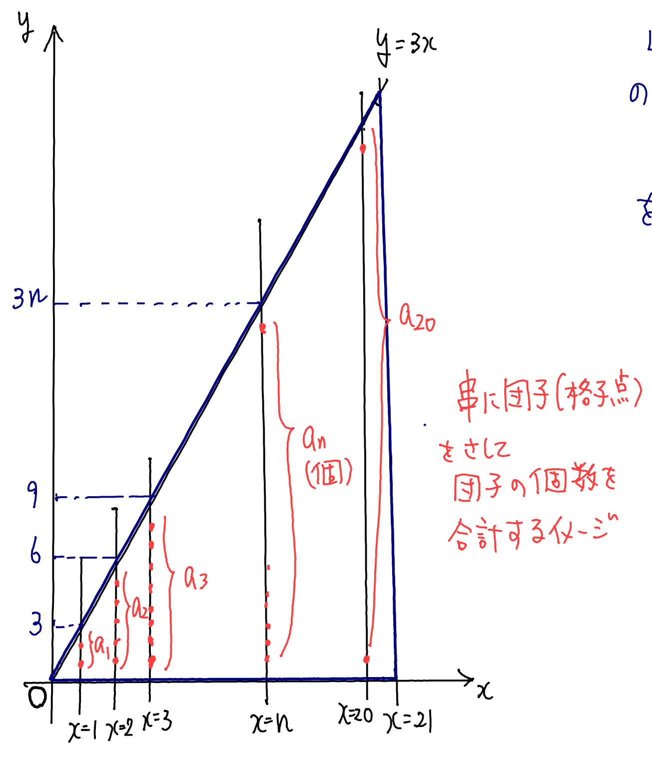
$\boxed{ウ}$ の解答群

⓪ 公　差	① 公　比

$\boxed{オ}$ の解答群

⓪ 等　差	① 等　比

$T: 0 \leqq y \leqq 3x,\ 0 \leqq x \leqq 21$



直線 $x=n$ $(1 \leqq n \leqq 20)$ 上にある T の内部にある格子点の個数 a_n は

$$0 < y < 3n$$

をみたす整数 $y = 1, 2, \cdots, 3n-1$ の個数に等しく

$$a_n = 3n-1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = \boxed{5}\ ア$$
$$a_3 = \boxed{8}\ イ$$

数列$\{a_n\}$は $\boxed{公差}$ ⓪ウ が $\boxed{3}$ エ の $\boxed{等差数列}$ ⓪オ である

T の内部の格子点の個数は

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10(2+59)$$
$$= \boxed{610}\ カキク$$

数学Ⅱ，数学B，数学C

(2) n を自然数とする。関数 $y = 2^x$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x = n + 1$ で囲まれた図形を U とする。

k を整数とする。直線 $x = k$ が U の内部にある格子点を通るとき，直線 $x = k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は $\boxed{2^k - 1}$ である。

⑦ケ（2点）

したがって，U の内部にある格子点の個数は

①コ（2点）

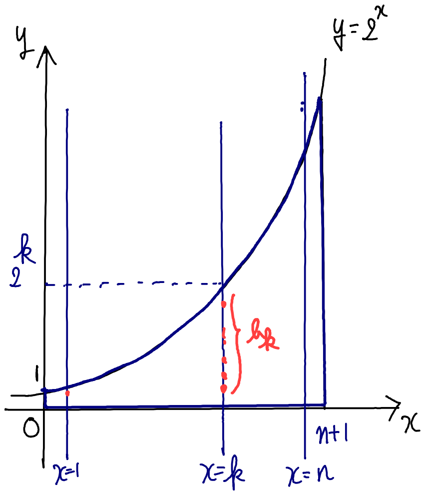
$2^{n+1} - n - 2$

$$\sum_{k=1}^{\boxed{n}} \left(\boxed{2^k - 1} \right) = \boxed{⑦}$$

ケ　　サ（2点）

である。

U : $0 < y \leqq 2^x$, $0 \leqq x \leqq n+1$



直線 $x=k$ ($k=1,2,\cdots,n$) の U の内部にある格子点の個数を b_k とすると

$$0 < y < 2^k$$

をみたす整数 $y = 1, 2, \cdots, 2^k - 1$ の個数に等しく

$$b_k = \boxed{2^k - 1} \quad ⑦ケ$$

U の内部にある格子点の個数は

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)} \quad ①コ$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

初項2，公比2
項数 n の
等比数列の和

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - \underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{n\text{個}}$$

×2

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2-1} - n$$

$$= \boxed{2^{n+1} - n - 2} \quad ⑦サ$$

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ $2k-2$	① $2k-1$	② $2k$
③ $2^{k-1}-2$	④ $2^{k-1}-1$	⑤ 2^{k-1}
⑥ $2^{k}-2$	⑦ $2^{k}-1$	⑧ 2^{k}

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ $n-1$	① n	② $n+1$
③ $2n-1$	④ $2n$	⑤ $2n+1$
⑥ $2^{n}-1$	⑦ 2^{n}	⑧ $2^{n}+1$

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ $2^{n}-2n-1$	① $2^{n}-2n$	② $2^{n}-n-1$
③ $2^{n}-n$	④ $2^{n}-3$	⑤ $2^{n+1}-2n-2$
⑥ $2^{n+1}-2n-1$	⑦ $2^{n+1}-n-2$	⑧ $2^{n+1}-n-1$
⑨ $2^{n+1}-3$		

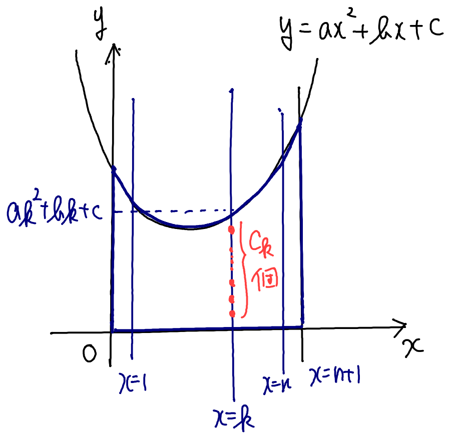
数学Ⅱ，数学B，数学C

(3) a, b, c は整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$ を満たすとする。放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形を V とする。すべての自然数 n に対して，V の内部にある格子点の個数が n^3 となるのは，$a=\boxed{3}$，$b=\boxed{-3}$，$c=\boxed{2}$ のときである。

シ　　スセ　　ソ　(3点)

$a>0$，$b^2-4ac<0$ より $y=ax^2+bx+c$ はつねに $y>0$ をみたす

V : $0<y\leqq ax^2+bx+c$，$0\leqq x\leqq n+1$



直線 $x=k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ の V の内部にある格子点の個数を C_k とすると

$$0<y<ak^2+bk+c$$

をみたす整数 $y=1,2,\cdots,ak^2+bk+c-1$ の個数に等しく

$$C_k=ak^2+bk+c-1$$

V の内部にある格子点の個数を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n\\
&=\sum_{k=1}^{n} C_k\\
&=\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)\\
&=a\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(c-1)n\\
&=\frac{a}{6}(2n^3+3n^2+n)+\frac{b}{2}(n^2+n)+(c-1)n\\
&=\underbrace{\frac{a}{3}}_{=1}n^3+\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{=0}n^2+\underbrace{\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)}_{=0}n
\end{aligned}$$

$S_n=n^3$ となるのは

$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}=1\\[4pt] \dfrac{a+b}{2}=0\\[4pt] \dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{2}+c-1=0\end{cases}$$

よって　$a=\boxed{3}$，$b=\boxed{-3}$，$c=\boxed{2}$

シ　スセ　ソ

別　$S_n=n^3$ となるとき

$C_1=S_1=1$

より　$a+b+c-1=1$

$\therefore$ $a+b+c=2$

$n\geqq 2$ のとき

$C_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^3-(n-1)^3$

$\underbrace{a}_{3}n^2+\underbrace{b}_{-3}n+\underbrace{c-1}_{1}=3n^2-3n+1$

n の恒等式なので

$$\begin{cases}a=3\\ b=-3\\ c-1=1\end{cases}$$

よって

$a=\boxed{3}$，$b=\boxed{-3}$，$c=\boxed{2}$

シ　スセ　ソ