数学Ⅱ，数学B，数学C

第３問　（必答問題）（配点　22）

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$

k を 0 でない実数とし，$f(x)$ を 2 次関数とする。$F(x)$ と $G(x)$ はどちらも導関数が $f(x)$ であるような関数で，$F(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとり，$G(x)$ は $x=k$ で極大値 0 をとるとする。

$F(0)=0$　　$G(k)=0$

$f(0)=0$ かつ $f(k)=0$ となる

← $F(x)$，$G(x)$ はともに $x=0$，k で極値をもつ（$k \neq 0$）

(1)　まず，$F(x)=2x^3+3x^2$ の場合を考える。

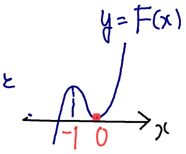
$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$f(x)=\boxed{\ 6\ }_{ア}\,x^2+\boxed{\ 6\ }_{イ}\,x \quad (2点)$$

$F'(x)=f(x)=\boxed{6x^2+6x}$　アイ

$=6x(x+1)$

$f(x)=0$ とすると $x=-1, 0$



$F(x)$ は $x=\boxed{-1}$ で極大値をとる　ウエ

であり，$F(x)$ は $x=\boxed{\ -1\ }_{ウエ}$（2点）で極大値をとる。また，$G(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$G(x)=\boxed{\ 2\ }_{オ}\,x^3+\boxed{\ 3\ }_{カ}\,x^2+C \quad (C\text{は積分定数}) \quad (2点)$$

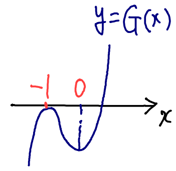
$G(x)=\int f(x)\,dx$

$=\int(6x^2+6x)\,dx$

$=\boxed{2x^3+3x^2+C}$　オ　カ

と表され，$G(x)$ は $x=\boxed{\ 0\ }_{キ}$（2点）で極小値をとる。さらに $G(x)$ に関する条件から

$C=\boxed{\ -1\ }_{クケ}$（1点）である。



$G(x)$ は $x=\boxed{0}$ で極小値をとる　キ

$G(x)$ は $x=-1$ で極大値 0 をとるので

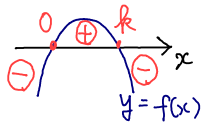
$G(-1)=-2+3+C=0$

$\therefore\ C=\boxed{-1}$　クケ

↖ $k=-1$

(2)　次に，$k>0$ の場合を考える。

このとき，$F(x)$ と $G(x)$ に関する条件から，$y=F(x)$ のグラフと $F(x)$，$G(x)$ の極値について調べよう。



$f(0)=f(k)=\boxed{0}$　コ，シ

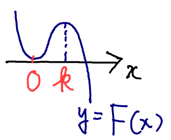
(i)　$F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることから，$f(0)=\boxed{\ 0\ }_{コ}$ であり，$x=0$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\ ⓪\ }_{サ}$（コ，サで1点）。さらに，$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから，$f(k)=\boxed{\ 0\ }_{シ}$ であり，$x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\ ①\ }_{ス}$（シ，スで1点）。したがって，$F(x)$ の導関数は $f(x)$ であることに注意すると，座標平面において $y=F(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\ ③\ }_{セ}$（2点）であることがわかる。

負から正に変わる

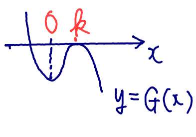
正から負に変わる

念のため，増減表をかいたけど 3次関数のグラフの概形は知っておきたい

x	…	0	…	k	…
$f(x)$	−	0	+	0	−
$F(x)$	↘	0	↗	極大	↘



x	…	0	…	k	…
$f(x)$	−	0	+	0	−
$G(x)$	↘	極小	↗	0	↘



$x=0$ の前後で $f(x)$ の符号は負(−)から正(+)に変わる $\boxed{⓪}$　サ

$x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は正(+)から負(−)に変わる $\boxed{①}$　ス

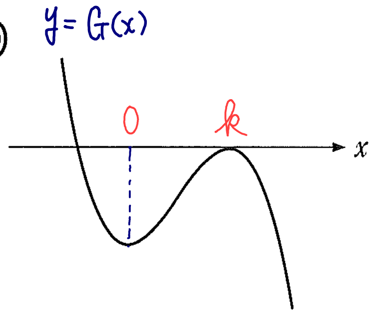
$y=F(x)$ のグラフの概形は $\boxed{③}$　セ

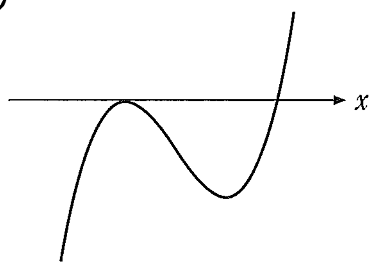
補　$y=G(x)$ のグラフの概形は ⓪

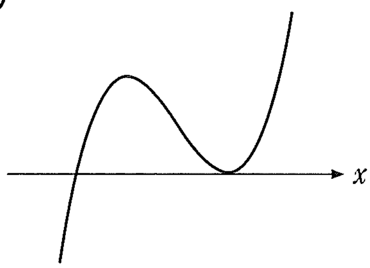
$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

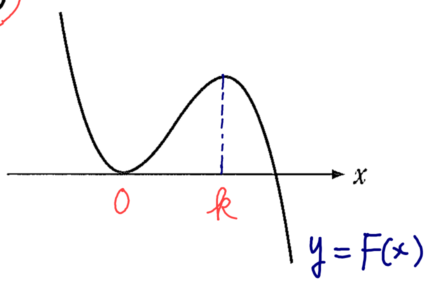
サ ⓪　負から正に変わる	ス ①　正から負に変わる
②　変わらない	

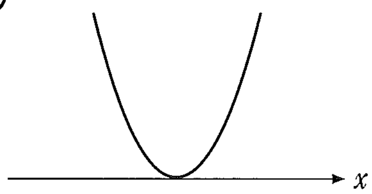
$\boxed{\text{セ}}$については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。なお，y 軸は省略しているが，上方向が正の方向であり，x 軸は直線 $y=0$ を表している。

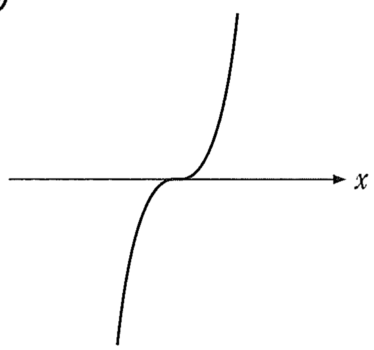
⓪


①


②


③


④


⑤


数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(ii)　$F(x)$ に関する条件から，すべての実数 x に対して

$$F(x)=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{x}} f(t)\,dt$$

③ソ　⓪タ (2点)

が成り立つ。このことと(i)の考察により，$F(x)$ の極大値は

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{k}} f(t)\,dt$$

②チ　⓪ツ (2点)

と表され，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=\boxed{f(x)}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の $\boxed{\text{面積}}$ と等しいことがわかる。

⓪テ　⓪ト (テ,トで2点)

さらに $G(x)$ に関する条件から，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の $\boxed{②}$ と等しいことがわかる。

極小値の−1倍　ナ (3点)

$$F(x)=F(x)-F(0)$$ ← $F(0)=0$

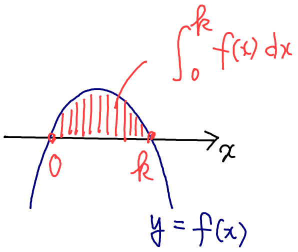
$$=\Big[F(t)\Big]_0^x$$

$$=\boxed{\int_0^x f(t)\,dt}$$

③ソ　⓪タ

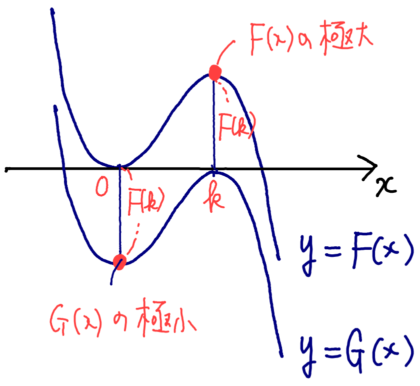
$F(x)$の極大値は　$F(k)=\boxed{\int_0^k f(t)\,dt}$　②チ　⓪ツ

$$=\int_0^k f(x)\,dx$$



$y=\boxed{f(x)}$ のグラフと x軸で囲まれた図形の $\boxed{\text{面積}}$ と等しい

⓪テ　⓪ト



$y=F(x)$ のグラフを y軸の負の方向に $F(k)$ だけ平行移動すると $y=G(x)$ のグラフになるので左図のようになる。

ゆえに　$G(0)=-F(k)$　すなわち　$F(k)=-G(0)$

よって　$F(x)$の極大値 $F(k)$ は $G(x)$の $\boxed{\text{極小値}G(0)\text{の}-1\text{倍}}$ と等しい

②ナ

$\boxed{\text{ソ}}$ ～ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② k	③ x
タ,ツ		チ	ソ

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $f(x)$	① $F(x)$	② $G(x)$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ 面積	① 面積の -1 倍

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ 極小値	① 極大値
② 極小値の -1 倍	③ 極大値の -1 倍