数学Ⅱ，数学B，数学C

第１問 （必答問題）（配点　15）

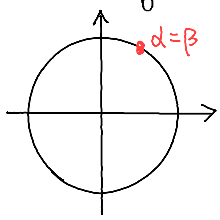
(1)　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \quad \cdots\cdots ①$$

の解を求めよう。以下では，$\alpha = \theta + \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = 2\theta$ とおく。このとき，① は

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

となる。



(i)　二つの一般角 α と β が等しければ，$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ は等しい。$\alpha = \beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ ア であり，これは ① の解の一つである。そして，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ ア のとき

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}} \begin{matrix} イ \\ ウ \end{matrix}$$

となる。

(ア，イ，ウで 2点)

$\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta$

$\therefore \theta = \boxed{\frac{\pi}{6}}$ ア

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3}$

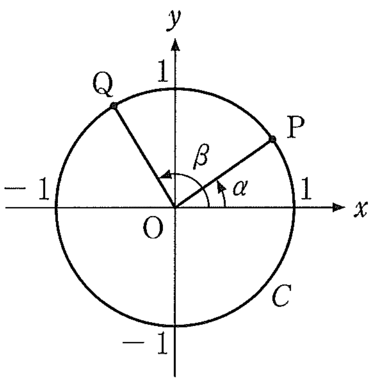
$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ イ ウ

(ii) 太郎さんと花子さんは，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ 以外の ① の解を求める方法について話している。

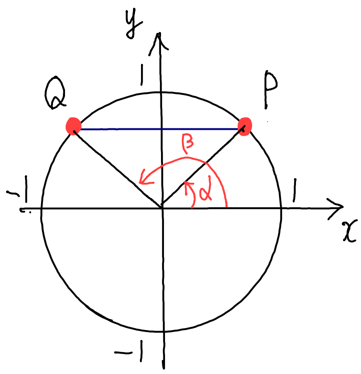
ア

> 太郎：角が等しくなくても，サインの値が等しくなることがあるね。
>
> 花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか，単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円を C とする。さらに，α の動径と C との交点を P，β の動径と C との交点を Q とする。ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図



(点Pのy座標)=(点Qのy座標) ② エ

② が成り立つときに，点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として，次の ⓪ ～ ③ のうち，正しいものは $\boxed{②}$ である。

エ(3点)

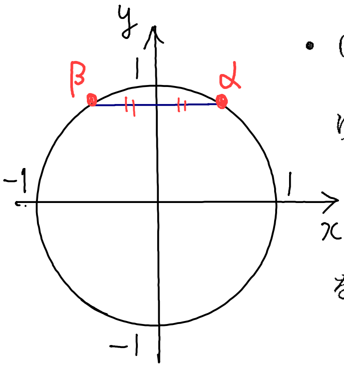
$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪	点 P と点 Q は同じ点である。
①	点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい。
②	点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。
③	点 P と点 Q は，原点 O に関して対称である。

数学Ⅱ，数学B，数学C

(iii)　$\theta \neq \dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ とする。

ア



$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$

- $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は

$$\alpha + \beta = \boxed{\pi}$$

②オ

を満たすことがわかる。これより，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの ① の解

カ

$$\theta = \frac{\boxed{5}}{\boxed{18}}\pi$$

キク　(オ，カ，キクで3点)

を得る。

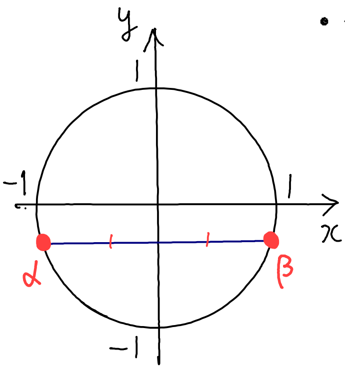
$\alpha+\beta = \boxed{\pi}$ ②オ

$\theta + \frac{\pi}{6} + 2\theta = \pi$

$3\theta = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ \theta = \boxed{\frac{5}{18}\pi}$ カ キク

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$



$\pi < 2\theta < 2\pi$

- $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合を考える。このとき，$\pi < \beta < 2\pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は

$$\alpha + \beta = \boxed{3\pi}$$

⑥ケ

を満たすことがわかる。これより，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの ① の解

コサ

$$\theta = \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\pi$$

シス　(ケ，コサ，シスで3点)

を得る。

$\alpha+\beta = \boxed{3\pi}$ ⑥ケ

$\theta + \frac{\pi}{6} + 2\theta = 3\pi$

$3\theta = \frac{17}{6}\pi$

$\therefore\ \theta = \boxed{\frac{17}{18}\pi}$ コサ シス

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2}\pi$

おまけ　$\sin\alpha = \sin\beta$

について

$\sin\alpha - \sin\beta = 0$　← 差積公式

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ または $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$

とすることもできる

以上より，$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，① の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\underset{\text{ア}}{\boxed{6}}},\quad \frac{\overset{\text{カ}}{\boxed{5}}}{\underset{\text{キク}}{\boxed{18}}}\pi,\quad \frac{\overset{\text{コサ}}{\boxed{17}}}{\underset{\text{シス}}{\boxed{18}}}\pi$$

である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① $\frac{\pi}{2}$	オ ② π	③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π	⑤ $\frac{5}{2}\pi$	ケ ⑥ 3π	⑦ $\frac{7}{2}\pi$

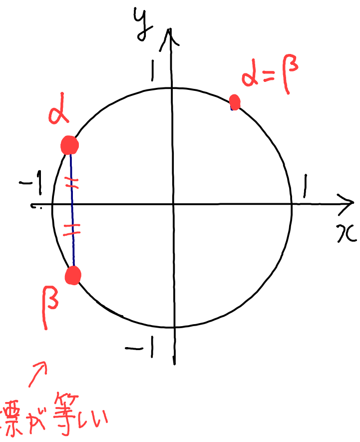
(2)　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$$

の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\underset{\text{セ（1点）}}{\boxed{6}}},\quad \frac{\overset{\text{ソタ}}{\boxed{11}}}{\underset{\text{チツ（3点）}}{\boxed{18}}}\pi$$

である。



おまけ
$\cos\alpha = \cos\beta$
について
$\cos\alpha - \cos\beta = 0$
$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$
$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ または $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$
とすることもできる

$\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$，$\beta = 2\theta$
とおくと
$\cos\alpha = \cos\beta$

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき　$0 \leqq 2\theta < 2\pi$ より　$0 \leqq \beta < 2\pi$

単位円を考えて　　$\frac{\alpha+\beta}{2} = \pi$

$\alpha = \beta$　　または　　$\alpha + \beta = 2\pi$

$\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta$　　または　　$3\theta + \frac{\pi}{6} = 2\pi$

よって

$\theta = \underset{\text{セ}}{\boxed{\frac{\pi}{6}}}$　　または　　$\theta = \overset{\text{ソタ}}{\underset{\text{チツ}}{\boxed{\frac{11}{18}\pi}}}$

補　一般化すると次になる

1　$\sin\alpha = \sin\beta$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta + 2k\pi$　または　$\alpha + \beta = (2k+1)\pi$
（kは整数）

2　$\cos\alpha = \cos\beta$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = \pm\beta + 2k\pi$
（kは整数）