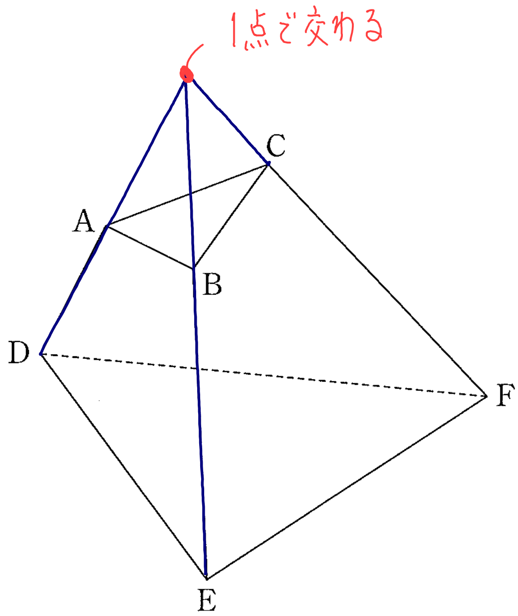
数学 I，数学 A

第 3 問　(配点　20)

6 点 A，B，C，D，E，F を頂点とし，三角形 ABC と DEF，および四角形 ABED，ACFD，BCFE を面とする五面体がある。ただし，直線 AD と BE は平行でないとする。

以下では，例えば，面 ABC を含む平面を平面 ABC，面 ABED を含む平面を平面 ABED，などということにする。



参考図

(1)　3 直線 AD，BE，CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり，平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり，直線 AD は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{ACFD}}$ との交線で
②ア
あるから，点 P は平面 $\boxed{\text{ACFD}}$ 上にあることがわかる。
ア

また，点 P は直線 BE 上にあり，直線 BE は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{BCFE}}$ との
③イ（ア,イで3点）
交線であるから，点 P は平面 $\boxed{\text{BCFE}}$ 上にあることがわかる。
イ

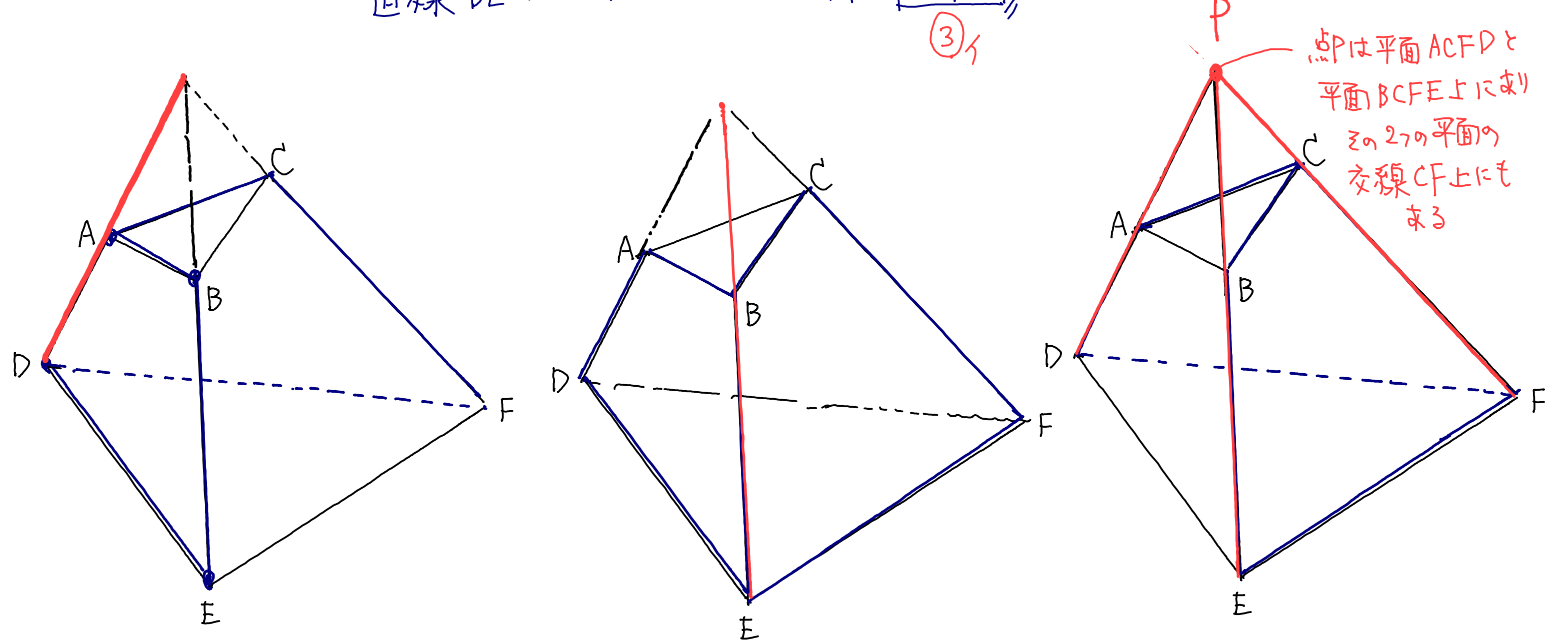
平面 $\boxed{\text{ACFD}}$ と平面 $\boxed{\text{BCFE}}$ との交線は直線 CF であるから，点 P は直線 CF
ア　イ
上にもあることがわかる。したがって，3 直線 AD，BE，CF は点 P で交わる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ABC	① DEF	ア ② ACFD	イ ③ BCFE

直線 AD は 平面 ABED と 平面 $\boxed{\text{ACFD}}$ との交線
②ア

直線 BE は 平面 ABED と 平面 $\boxed{\text{BCFE}}$ との交線
③イ



(2) 五面体において，面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり

AB = BC = CA = 3

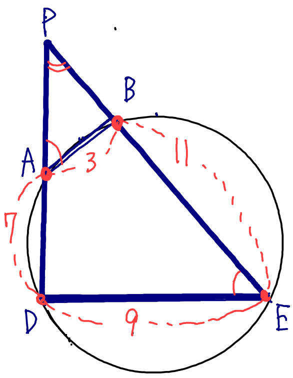
$$AD = 7,\quad BE = 11,\quad CF = 17,\quad DE = 9$$

であるとする。また，6 点 A，B，C，D，E，F はある一つの球面上にあるとし，その球面を S とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i) 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり，4 点 A，B，E，D はその円周上にある。このことから，三角形 PAB と PED は相似であることがわかり，その相似比は 1 ： $\boxed{3}$ である。したがって

ウ(3点)

9　2.7
1　0.3



$\boxed{3}$ PA ＝ PB ＋ $\boxed{11}$ エオ

ウ

$\boxed{3}$ PB ＝ PA ＋ $\boxed{7}$ カ

ウ

(エオ，カで2点)

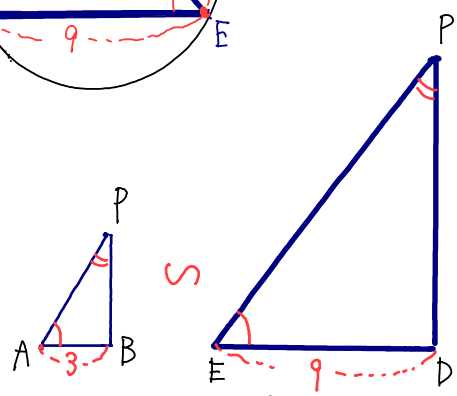
が成り立つ。よって

PA ＝ $\boxed{5}$，　PB ＝ $\boxed{4}$

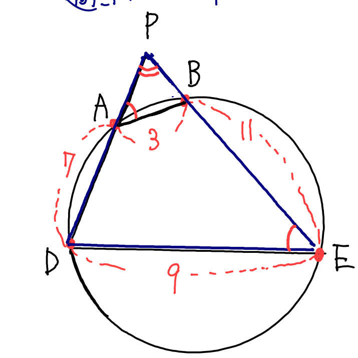
キ　ク

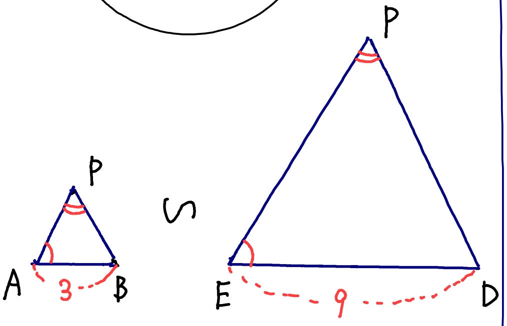
(キ，クで3点)

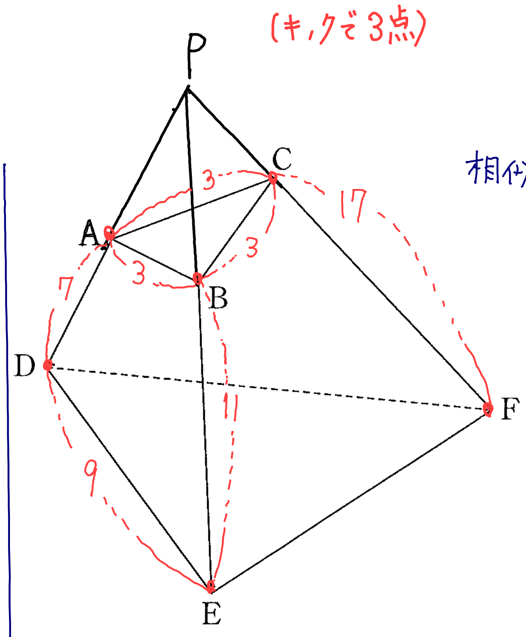
となる。



補 下図は三角形の形状がよくわからず適当にかいたもの。







参考図(再掲)

相似比　3 ： 9
= 1 ： $\boxed{3}$ ウ

PE = 3PA
PD = 3PB

であり

PE = PB + BE = PB + 11
PD = PA + AD = PA + 7

でもあるから

3PA = PB + $\boxed{11}$ エオ …①

3PB = PA + $\boxed{7}$ カ …②

①より PB = 3PA − 11 …①′

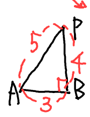
①′を②へ代入して 9PA − 33 = PA + 7

8PA = 40

よって PA = $\boxed{5}$ キ

①′から PB = $\boxed{4}$ ク

PA=5，PB=4
とわかり AB=3 なので
△PAB は ∠ABP=90°
の直角三角形とわかる

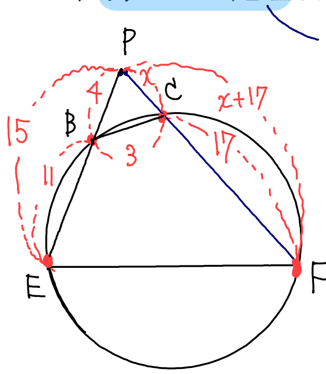


(ii)　平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると，方べきの定理より

$PB \cdot PE = PC \cdot PF$

PC = $\boxed{3}$

ケ (3点)



$PC = x$ とすると

$4 \cdot 15 = x(x+17)$

$x^2 + 17x - 60 = 0$

$(x-3)(x+20) = 0$

$\therefore x = 3$

よって　$PC = \boxed{3}$ ケ

$PF = 20$

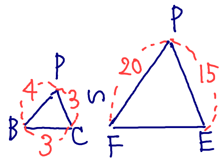
となる。したがって

EF = $\boxed{15}$，　DF = $\boxed{12}$

コサ　　シス

(コサ，シスで3点)

となる。



(i) と同様にして

$\triangle PBC \backsim \triangle PFE$

相似比　$PB : PF = 4 : 20$

$= 1 : 5$

$EF = 5BC$

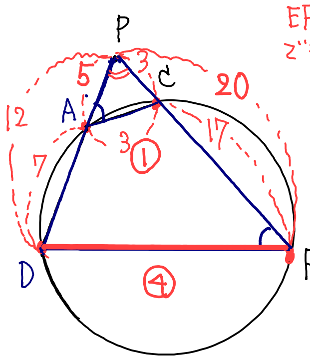
$= 5 \cdot 3$

$= \boxed{15}$ コサ

CB=CP=3 より EF=EP=15 でもよい

(iii)　∠ADE，∠ADF，∠EDF の大きさに着目すると，次の命題 (a)，(b)，(c) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{4}$ であることがわかる。

セ (3点)



$\triangle PAC \backsim \triangle PFD$

相似比　$PA : PF$

$= 5 : 20$

$= 1 : 4$

$DF = 4AC$

$= 4 \cdot 3$

$= \boxed{12}$ シス

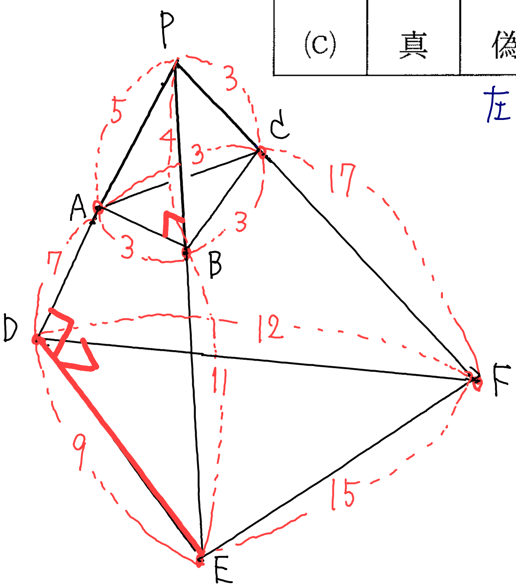
(a)　平面 ABED と平面 DEF は垂直である。

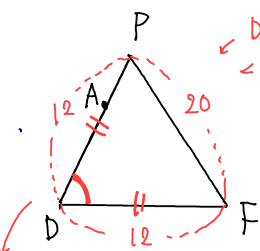
(b)　直線 DE は平面 ACFD に垂直である。

(c)　直線 AC と直線 DE は垂直である。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

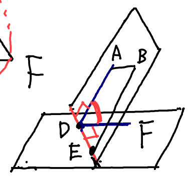




DP=DF なので ∠PDF ≠ 90°

左図のようになり $3^2+4^2=5^2$，$9^2+12^2=15^2$ が成り立つことから

$\angle PBA = \angle PDE = \angle EDF = 90^\circ$　← 三平方の定理



(a) 平面 ABED と平面 DEF の交線は直線 DE

その交線 DE に垂直な2つの直線 DA，DF のなす角が 90° ではない

よって 平面 ABED ⊥ 平面 DEF は $\boxed{偽}$

(b) 平面 ACFD 上にある平行でない2本の直線 DA，DF はともに直線 DE に垂直である

(DA ⊥ DE かつ DF ⊥ DE)

よって 直線 DE ⊥ 平面 ACFD は $\boxed{真}$

(c) 直線 AC は平面 ACFD 上にあるので (b) から 直線 AC ⊥ 直線 DE は $\boxed{真}$

← 平面 ACFD 上にある すべての直線は 直線 DE に垂直になる

よって $\boxed{4}$ セ