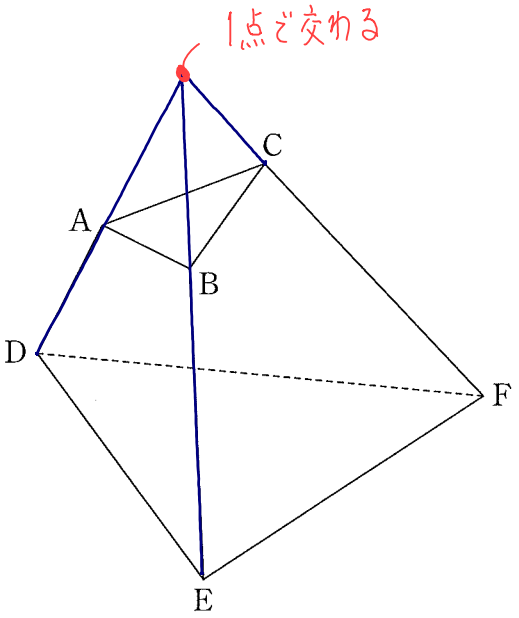
数学Ⅰ，数学A

第3問　(配点　20)

6点A，B，C，D，E，Fを頂点とし，三角形ABCとDEF，および四角形ABED，ACFD，BCFEを面とする五面体がある。ただし，直線ADとBEは平行でないとする。

以下では，例えば，面ABCを含む平面を平面ABC，面ABEDを含む平面を平面ABED，などということにする。



参考図

(1)　3 直線 AD，BE，CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり，平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり，直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線であるから，点 P は平面 ACFD 上にあることがわかる。

また，点 P は直線 BE 上にあり，直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線であるから，点 P は平面 BCFE 上にあることがわかる。

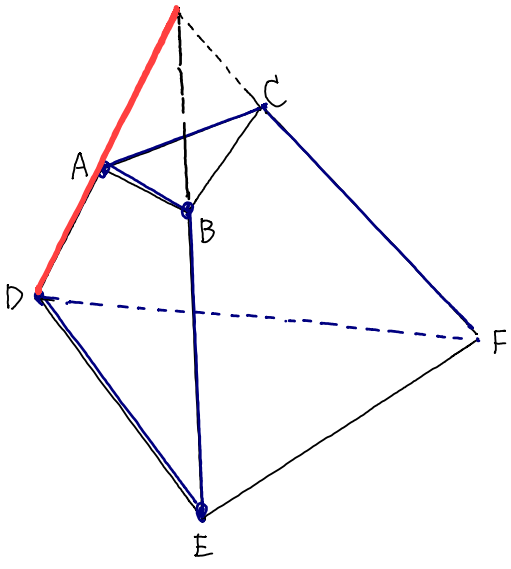
平面 ACFD と平面 BCFE との交線は直線 CF であるから，点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって，3 直線 AD，BE，CF は点 P で交わる。

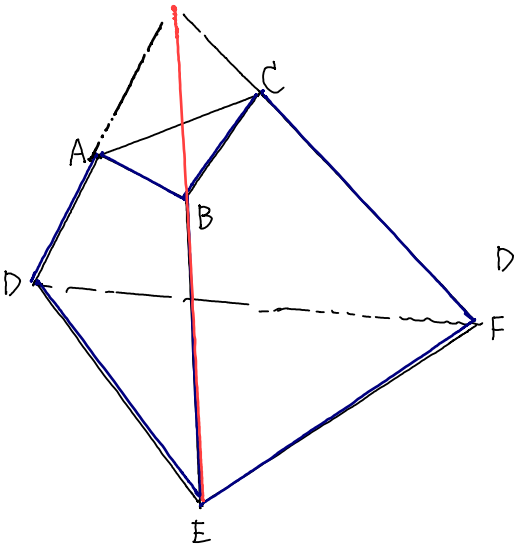
ア，イ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

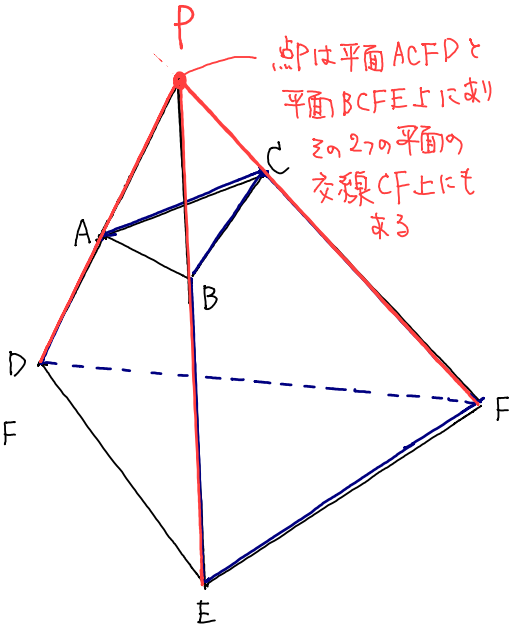
⓪ ABC	① DEF	② ACFD	③ BCFE

直線 AD は 平面 ABED と 平面 ACFD との交線

直線 BE は 平面 ABED と 平面 BCFE との交線







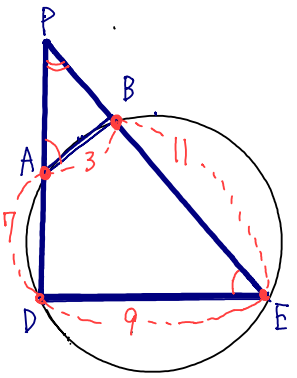
数学Ⅰ，数学A

(2)　五面体において，面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり　← AB = BC = CA = 3

$$AD = 7, \quad BE = 11, \quad CF = 17, \quad DE = 9$$

であるとする。また，6 点 A，B，C，D，E，F はある一つの球面上にあるとし，その球面を S とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i)　平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり，4 点 A，B，E，D はその円周上にある。このことから，三角形 PAB と PED は相似であることがわかり，その相似比は 1 ： [3] である。したがって　ウ(3点)

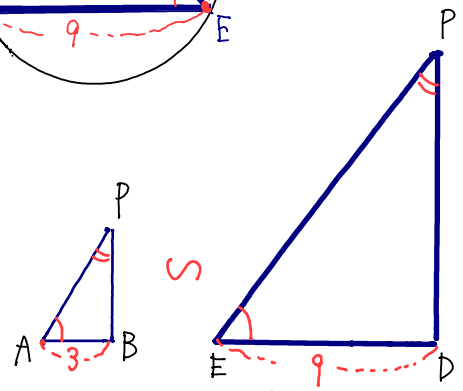


[3] PA = PB + [11]　エオ
[3] PB = PA + [7]　カ
(エオ，カで2点)

が成り立つ。よって

PA = [5]，　PB = [4]
キ　ク
(キ，クで3点)

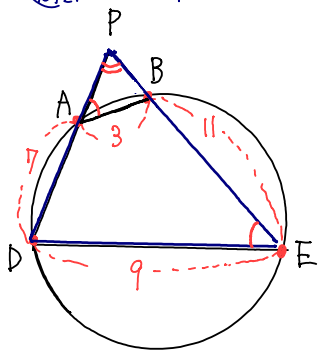
となる。

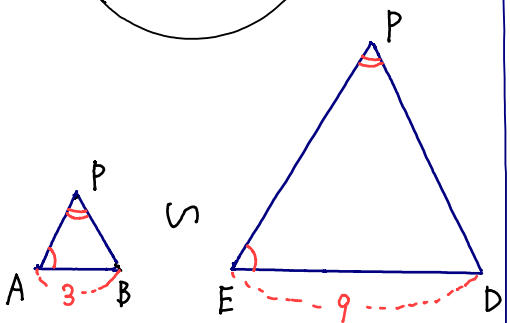


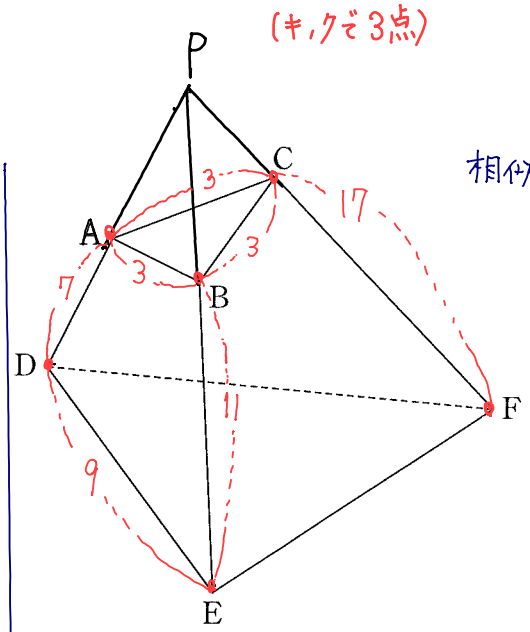
相似比　3 : 9 = 1 : [3]　ウ

PE = 3PA
PD = 3PB
であり
PE = PB + BE = PB + 11
PD = PA + AD = PA + 7
でもあるから
3PA = PB + [11]　エオ　…①
3PB = PA + [7]　カ　…②
①より　PB = 3PA − 11　…①′
①′を②へ代入して　9PA − 33 = PA + 7
8PA = 40
よって　PA = [5]　キ
①′から　PB = [4]　ク

(補) 下図は三角形の形状がよくわからず適当にかいたもの。







参考図(再掲)

PA=5, PB=4 とわかり AB=3 なので
△PAB は ∠APB=90° の直角三角形とわかる

(ii)　平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると，方べきの定理より

$PB \cdot PE = PC \cdot PF$

$PC = x$ とすると

$4 \cdot 15 = x(x+17)$

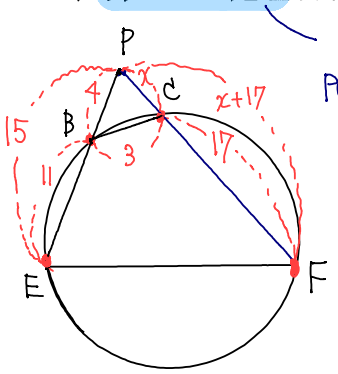
$x^2 + 17x - 60 = 0$

$(x-3)(x+20) = 0$

$\therefore x = 3$

よって $PC = \boxed{3}$ ケ

$PF = 20$



$PC = \boxed{3}$

ケ（3点）

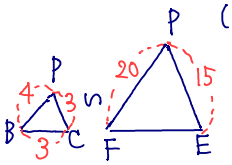
となる。したがって

$EF = \boxed{15}$，　$DF = \boxed{12}$

コサ　　シス

（コサ，シスで3点）

となる。



(i)と同様にして

$\triangle PBC \backsim \triangle PFE$

相似比 $PB : PF = 4 : 20$
$= 1 : 5$

$EF = 5BC$
$= 5 \cdot 3$
$= \boxed{15}$ コサ

(iii)　∠ADE，∠ADF，∠EDF の大きさに着目すると，次の命題(a)，(b)，(c)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{④}$ であることがわかる。

セ（3点）

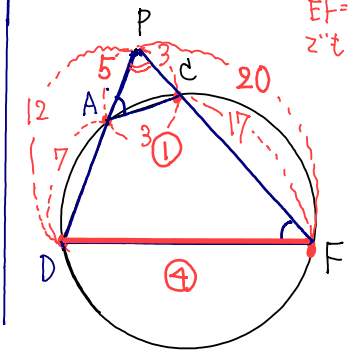
$CB = CP = 3$ より

$EF = EP = 15$ でもよい

(a)　平面 ABED と平面 DEF は垂直である。

(b)　直線 DE は平面 ACFD に垂直である。

(c)　直線 AC と直線 DE は垂直である。



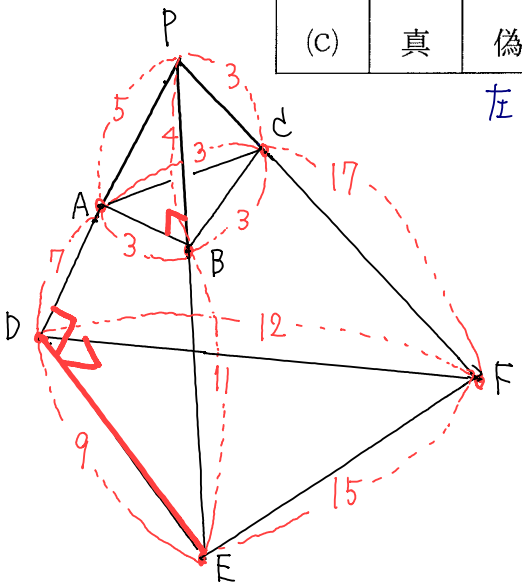
$\triangle PAC \backsim \triangle PFD$

相似比 $PA : PF$
$= 5 : 20$
$= 1 : 4$

$DF = 4AC$
$= 4 \cdot 3$
$= \boxed{12}$ シス

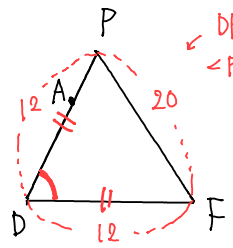
$\boxed{セ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

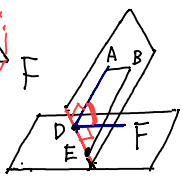


左図のようになり $3^2+4^2=5^2$，$9^2+12^2=15^2$ が成り立つことから

$\angle PBA = \angle PDE = \angle EDF = 90^\circ$　← 三平方の定理



DP=DF なので
$\angle PDF \neq 90^\circ$

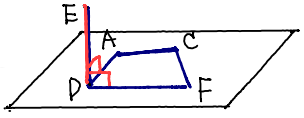


(a) 平面ABEDと平面DEFの交線は直線DE
その交線DEに垂直な2つの直線DA，DFのなす角が90°ではない
よって 平面ABED⊥平面DEFは $\boxed{偽}$

(b) 平面ACFD上にある平行でない2本の直線DA，DFはともに直線DEに垂直である
（DA⊥DE かつ DF⊥DE）
よって 直線DE⊥平面ACFDは $\boxed{真}$

(c) 直線ACは平面ACFD上にあるので(b)から直線AC⊥直線DEは $\boxed{真}$

よって $\boxed{④}$ セ



← 平面ACFD上にあるすべての直線は直線DEに垂直になる