数学Ⅰ，数学A

第２問 （配点　30）

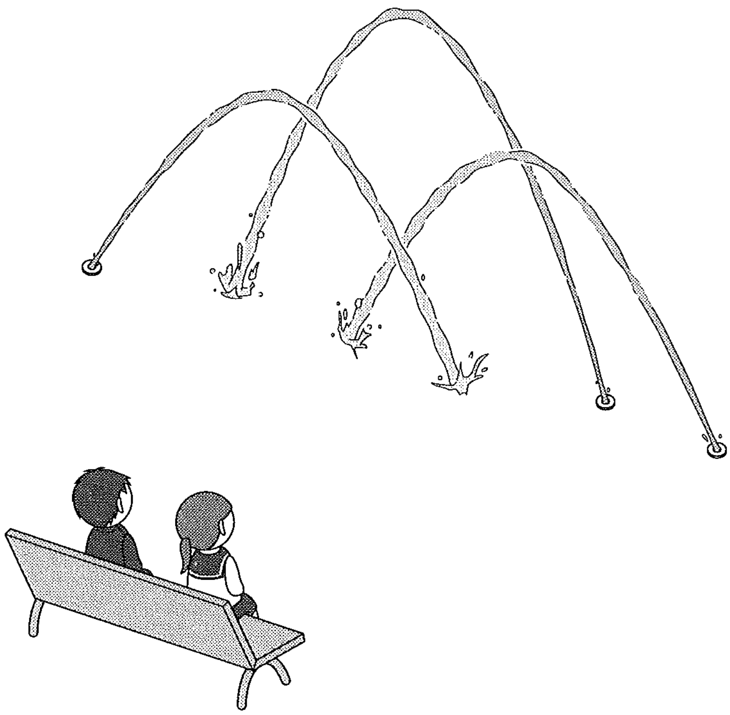
〔1〕 花子さんと太郎さんは，公園にある二つの小さな噴水と一つの大きな噴水の高さについて話している。

(15点)

花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。

太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は，放物線になると聞いたことがあるよ。

花子：じゃあ，放物線と仮定して，およその高さを考えてみよう。



参考図

花子さんと太郎さんは，噴水の高さについて次のように考えることにした。

噴水の水がえがく曲線は三つとも放物線とする。三つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図1のように座標軸が定められた平面上に，三つの噴水を正面から見た図をかく。左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定1**を，中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定2**を設定する。図1の P_1，P_2，P_3 は噴水の水が出る位置である。なお，長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。

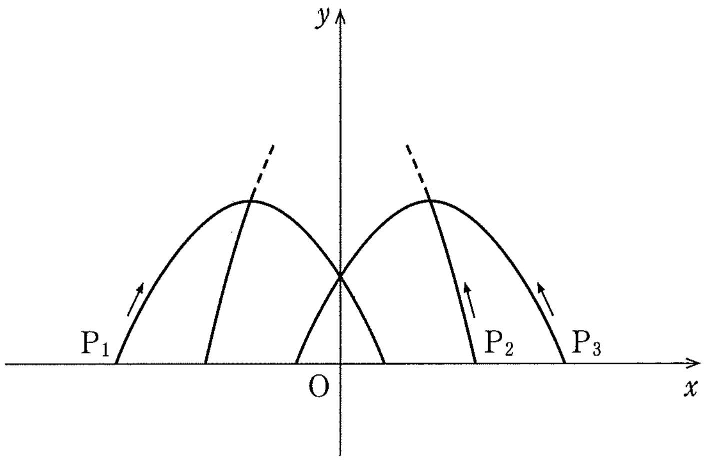


図　1

数学Ⅰ，数学A

仮定1

- 左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は，x 軸上の点 $P_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ から出て点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ に至る。
- 右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は，x 軸上の点 $P_3\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ から出て点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ に至る。
- C_1 と C_3 はともに点 $(0, 1)$ を通る。

仮定2

中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は，x 軸上の点 $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

C_3 と C_1 の頂点は y 軸対称であるから
C_2 は y 軸対称のグラフになる

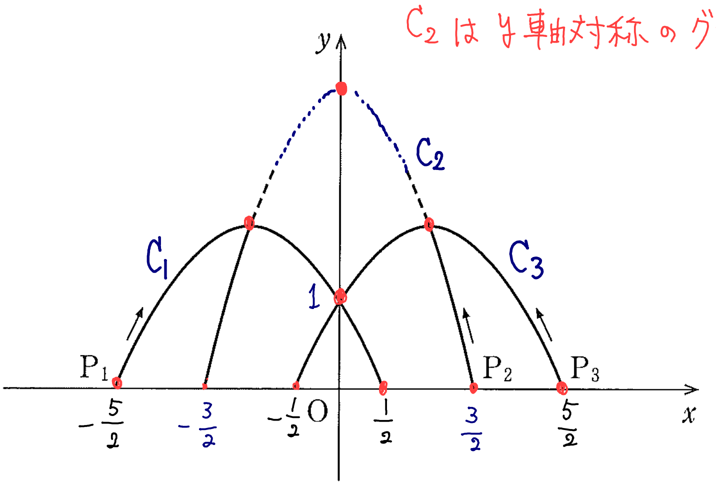
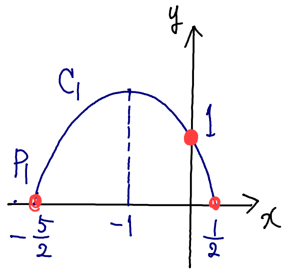


図1（再掲）

(1) 仮定1と仮定2のもとで考える。C_1をグラフにもつ2次関数を

$y = ax^2 + bx + c$ とする。このとき $c =$ $\boxed{1}$ であり，また

ア(2点)



$$y = -\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}x^2 - \frac{\boxed{8}}{\boxed{5}}x + \boxed{1}$$

イ ウ エ オ ア (3点)

である。

㊟ C_1の頂点のx座標は $-\frac{5}{2}$と$\frac{1}{2}$の平均より

$\frac{-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2} = -1$

C_1 の頂点の y 座標は $\frac{\boxed{9}}{\boxed{5}}$ である。このことを用いると，C_2 の頂点

カ キ (2点)

の y 座標は $\frac{\boxed{81}}{\boxed{25}}$ であることがわかる。

クケ コサ (3点)

したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\boxed{0}$ である。

およそ2倍　シ

$C_1 : y = ax^2 + bx + c$

C_1は点$(0, 1)$を通るので $c = \boxed{1}$ ア

C_1はx軸上の2点$\left(-\frac{5}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$を通るので

$y = a\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$= a\left(x^2 + 2x - \frac{5}{4}\right)$

$= ax^2 + 2ax - \frac{5}{4}a$

$-\frac{5}{4}a = 1$ であるから $a = -\frac{4}{5}$

$C_1 : y = -\frac{4}{5}\left(x^2 + 2x - \frac{25}{4}\right)$

$= \boxed{-\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1}$

イウ エオ

$= -\frac{4}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5}$

C_1の頂点は

$\left(-1, \boxed{\frac{9}{5}}\right)$ カキ

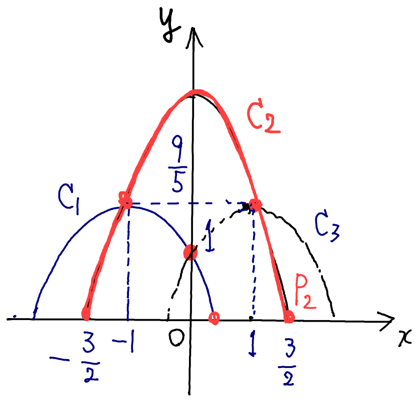
対称性から

C_3の頂点は

$\left(1, \frac{9}{5}\right)$

$\boxed{シ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ およそ2倍	① およそ3倍
② およそ4倍	③ およそ5倍



C_2 はx軸上の2点$\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$を通るので

$C_2 : y = p\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\ (p<0)$

$= p\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$

と表せる。

C_2はC_3の頂点$\left(1, \frac{9}{5}\right)$を通るので

$\frac{9}{5} = p\left(1 - \frac{9}{4}\right)$

$= -\frac{5}{4}p$

$\therefore p = -\frac{36}{25}$

$C_2 : y = -\frac{36}{25}\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$

$= -\frac{36}{25}x^2 + \frac{81}{25}$

よってC_2の頂点は $\left(0, \boxed{\frac{81}{25}}\right)$ クケ コサ

大きな噴水の高さ $\frac{81}{25}$ ←C_2の頂点のy

は　約2倍

小さな噴水の高さ $\frac{9}{5}$ ←C_1の頂点のy

の $\boxed{およそ2倍}$ である。

⓪シ

(2) 花子さんと太郎さんは，大きな噴水の高さについて話している。

花子：正面から見たとき，大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに，大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。

太郎：左右の二つの小さな噴水は変えずに，大きな噴水の水が出る位置を変えてみたらどうかな。

花子：大きな噴水の高さが5メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

仮定 2 の代わりに次の**仮定** 2′ をおく。

仮定 2′

- 中央の大きな噴水の水がえがく放物線 $C_2{}'$ は，x 軸の正の部分の点 $P_2{}'$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。
- $C_2{}'$ の頂点の y 座標は 5 である。

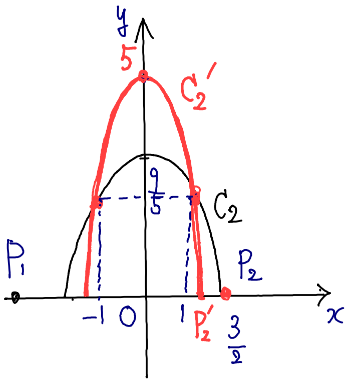
仮定 1 と**仮定** 2′ のもとで考える。このとき，$P_2{}'$ は P_2 より $\dfrac{\boxed{1}^{ス}}{\boxed{4}_{セ}}$ だけ

$\boxed{P_1}$ の方にある。

⓪ ソ　(ス,セ,ソで4点)

$\boxed{ソ}$ の解答群

⓪ P_1	① P_3



C_2' のグラフは y 軸対称で頂点が $(0,\ 5)$ より

$$C_2' : y = kx^2 + 5 \quad (k<0)$$

と表せて C_3 の頂点 $\left(1,\ \frac{9}{5}\right)$ を通るので

$$\frac{9}{5} = k + 5$$

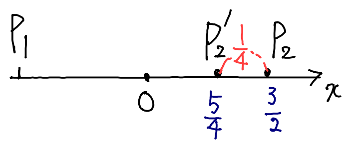
$$\therefore\ k = -\frac{16}{5}$$

$$C_2' : y = -\frac{16}{5}x^2 + 5$$

$$= -\frac{16}{5}\left(x^2 - \frac{25}{16}\right)$$

$$= -\frac{16}{5}\left(x + \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right)$$

ゆえに $P_2'\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$



よって P_2' は P_2 より $\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$ ス セ だけ P_1 の方にある。

$\boxed{0}$ ソ