〔2〕 図 1 のように，直線 ℓ 上の点 A において ℓ に接する半径 2 の円を円 O とし，ℓ 上の点 B において ℓ に接する半径 4 の円を円 O′ とする。円 O と O′ は 2 点で交わるとし，その交点を P，Q とする。ただし，$\angle APB < \angle AQB$ とする。さらに，$\angle PAB$ は鋭角であるとする。このとき，$\triangle PAB$ と $\triangle QAB$ について考えよう。

(20点)

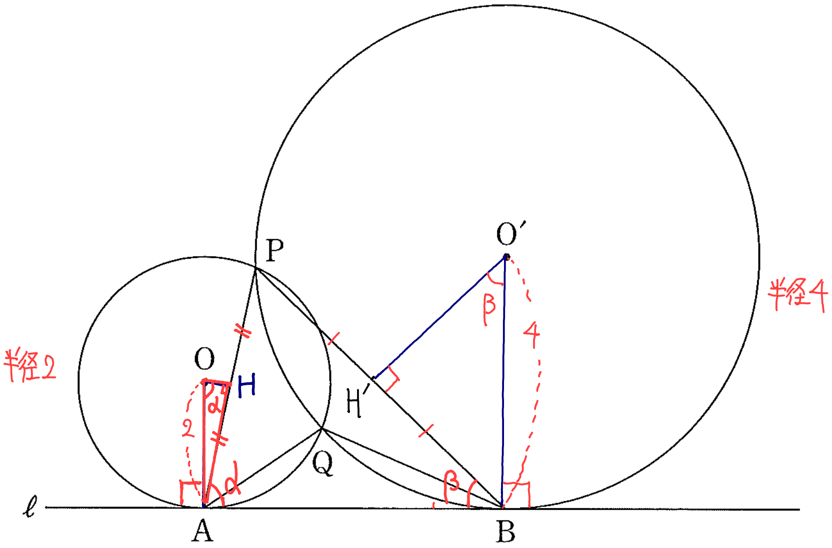


図 1

補 $\angle OAH = 90^\circ - \alpha$
$\angle OHA = 90^\circ$
より $\triangle OAH$ の内角から $\angle AOH = \alpha$

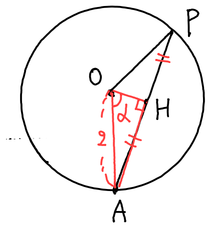
(1) $\angle PAB = \alpha$，$\angle PBA = \beta$ とおく。

円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。$\angle OAB = 90^\circ$ であるから，$\angle AOH = \alpha$ である。よって，$\triangle OAH$ に着目すると，AH ＝ $\boxed{\ 2\ }$ $\sin\alpha$ であるから
　　コ

$AH = OA \sin\angle AOH$
$= \boxed{2} \sin\alpha$ （コ）

$PA = 2AH$
$= 2\cdot 2\sin\alpha$
$= \boxed{4} \sin\alpha$ （サ） …①

$$PA = 2\,AH = \boxed{\ 4\ }\ \sin\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
　　サ　(コ，サで2点)

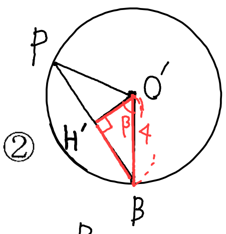


である。

同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると

$\angle BO'H = \beta$, $BH' = 4\sin\beta$

$PB = 2\,BH' = \boxed{8}\sin\beta$ …②

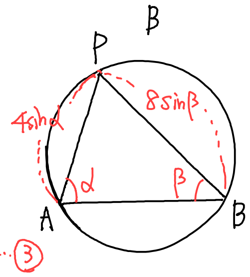


$$PB = 2\,BH' = \boxed{8}\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

シ（2点）

であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により



$\dfrac{PA}{\sin\beta} = \dfrac{PB}{\sin\alpha} = 2R_1$ …③

$\boxed{1}$ ス　$\boxed{0}$ セ

$$\frac{PA}{\sin\boxed{\beta}} = \frac{PB}{\sin\boxed{\alpha}} = 2R_1$$

①ス　⓪セ　（ス，セで2点）

が成り立つので

$PA\sin\alpha = PB\sin\beta$

①，② を代入して

$4\sin\alpha\sin\alpha = 8\sin\beta\sin\beta$

$\sin^2\alpha = 2\sin^2\beta$

$\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$ であるから

$\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$

$\therefore \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{2}$ …④

$$PA\sin\boxed{\alpha} = PB\sin\boxed{\beta}$$

セ　ス

である。この式に，① と ② を代入することにより

$$\sin\boxed{\alpha} = \sqrt{\boxed{2}}\,\sin\boxed{\beta}$$

セ　ソ（3点）　ス

$$PB = \sqrt{\boxed{2}}\,PA$$

ソ

③ から

$PB = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}PA$

$= \sqrt{2}\,PA$ （∵④）

となることがわかる。さらに

③ から

$R_1 = \dfrac{PA}{2\sin\beta}$

$= \dfrac{4\sin\alpha}{2\sin\beta}$ （∵①）

$= \boxed{2\sqrt{2}}$ （∵④）

タチ

$$R_1 = \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$$

タ　チ（3点）

が得られる。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

セ ⓪ α	ス ① β

(2) 太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。

花子：(1)の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

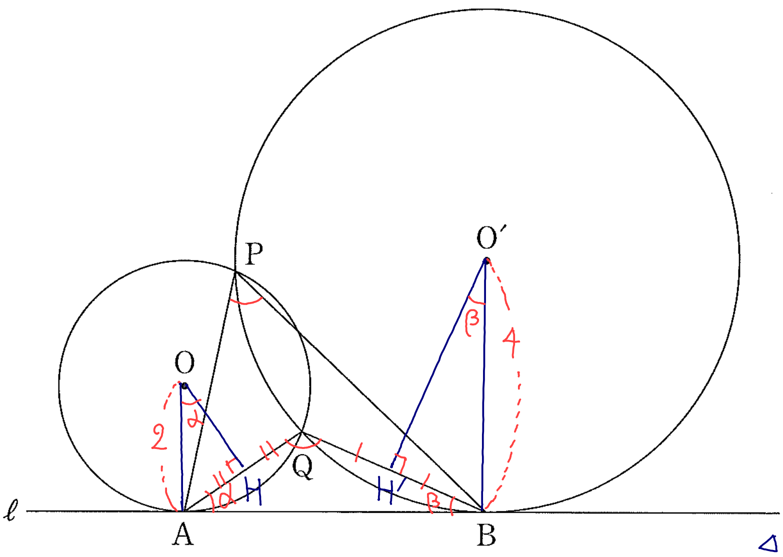


図 1（再掲）

Qを(1)のPとみなして
$\angle QAB=\alpha,\ \angle QBA=\beta$
とし点Oから辺AQに垂線OH
点O′から辺BQに垂線OH′
を下ろして同様のことが
成り立つので
$R_1 = R_2\ (=2\sqrt{2})$
$\boxed{①}$ ツ

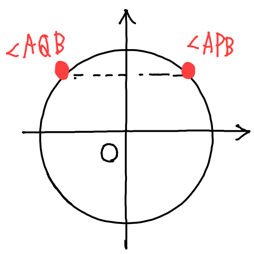
△PAB, △QABに正弦定理を用いて
$\dfrac{AB}{\sin\angle APB} = 2R_1$
$\dfrac{AB}{\sin\angle AQB} = 2R_2$
すなわち
$\sin\angle APB = \dfrac{AB}{2R_1}$ …⑤
$\sin\angle AQB = \dfrac{AB}{2R_2}$
$R_1=R_2$であるから
$\sin\angle APB = \sin\angle AQB$
$\boxed{①}$ テ

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，R_1 $\boxed{=}$ R_2 である。さらに，$\sin\angle APB$ $\boxed{=}$ $\sin\angle AQB$ であることもわかる。

①ツ　①テ（ツ,テで3点）

$\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	ツ,テ ① $=$	② $>$



補 $0^\circ<\angle APB<90^\circ$
$90^\circ<\angle AQB<180^\circ$
である.
↑
ⅡBC第1問
につながっていた!?

(3) 太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と △QAB の辺の長さについて考えている。

> 太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。
>
> 花子：∠APB < ∠AQB に注意して求めてみようよ。

鋭角　鈍角

AB $= 2\sqrt{7}$ とする。このとき

$$\sin\angle \mathrm{APB} = \frac{\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{4}}$$ トナ ニ（2点）

である。(1)より，PB $= \sqrt{\boxed{2}}$ PA であるから
ン

PA $= \sqrt{\boxed{14}}$
ヌネ（3点）

である。

同様に，QA $= \sqrt{7}$ であることがわかる。

⑤から

$\sin\angle APB = \frac{AB}{2R_1}$　$AB = 2\sqrt{7}$，$R_1 = 2\sqrt{2}$

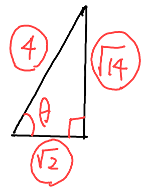
$= \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

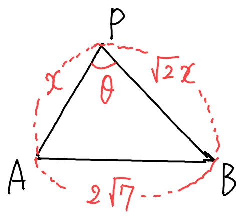
$= \boxed{\frac{\sqrt{14}}{4}}$ トナ ニ

$\angle APB = \theta$ $(0° < \theta < 90°)$
とおくと
$\sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$



$PB = \sqrt{2}PA$ であるから
$PA = x$
とおくと
$PB = \sqrt{2}x$



△PABに余弦定理を用いて

$(2\sqrt{7})^2 = x^2 + (\sqrt{2}x)^2 - 2x \cdot \sqrt{2}x\cos\theta$

$28 = x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= 2x^2$

$x^2 = 14$

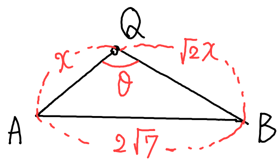
$\therefore x = \sqrt{14}$

よって　$PA = \boxed{\sqrt{14}}$ ヌネ

補　念のためやると

$\angle AQB = \theta$ $(90° < \theta < 180°)$
とおくと　$\sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ← $\cos\theta < 0$



右で PをQとして同様で

$28 = x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$= 4x^2$

cosθの値が変わるだけで 右と同じ

$x^2 = 7$

$\therefore x = \sqrt{7}$

よって，$QA = \sqrt{7}$