〔2〕 図1のように，直線ℓ上の点Aにおいてℓに接する半径2の円を円Oとし，ℓ上の点Bにおいてℓに接する半径4の円を円O′とする。円OとO′は2点で交わるとし，その交点をP，Qとする。ただし，∠APB < ∠AQBとする。さらに，∠PABは鋭角であるとする。このとき，△PABと△QABについて考えよう。

(20点)

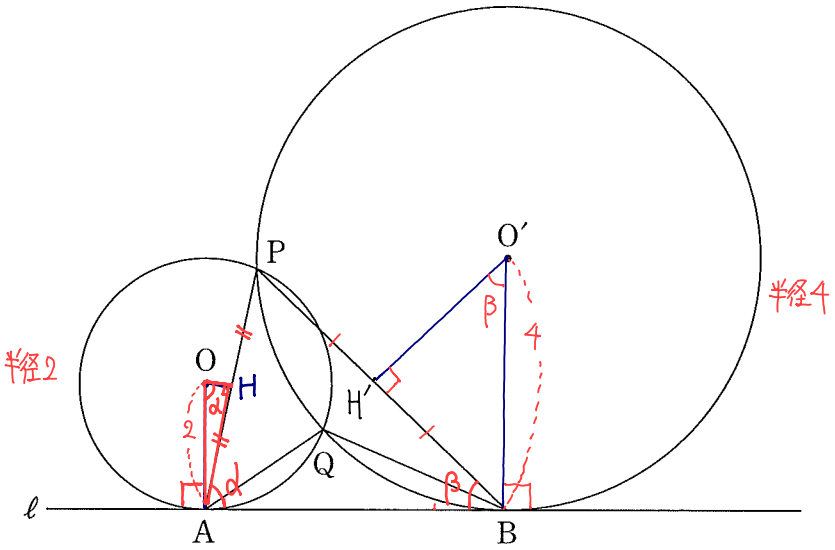


図 1

補 ∠OAH = 90° − α
∠OHA = 90°
より △OAHの内角から ∠AOH = α

(1) ∠PAB = α，∠PBA = βとおく。

円Oの中心Oから直線PAに引いた垂線と直線PAとの交点をHとする。∠OAB = 90°であるから，∠AOH = αである。よって，△OAHに着目すると，AH = $\boxed{2}$ sin αであるから

コ

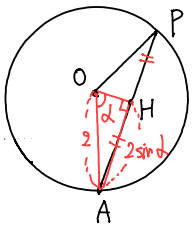
$\boxed{AH}$ = OA sin∠AOH
= $\boxed{2}$ sin α
コ

PA = 2$\boxed{AH}$
= 2·2sinα
= $\boxed{4}$ sinα …①
サ

PA = 2 AH = $\boxed{4}$ sin α …… ①

サ (コ,サで2点)

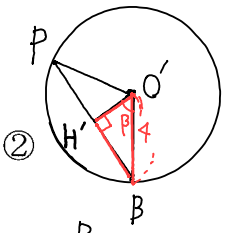
である。



同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると

$\angle BO'H = \beta$，$BH' = 4\sin\beta$

$PB = 2BH' = 8\sin\beta$ …②

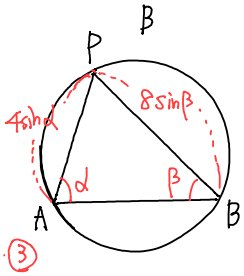


$$PB = 2\,BH' = \boxed{8}\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

シ（2点）

であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により



$$\frac{PA}{\sin\boxed{\beta}} = \frac{PB}{\sin\boxed{\alpha}} = 2R_1$$

①ス　⓪セ（ス，セで2点）

$\frac{PA}{\sin\beta} = \frac{PB}{\sin\alpha} = 2R_1$ …③

⓪ス　⓪セ

$PA\sin\alpha = PB\sin\beta$

①，②を代入して

$4\sin\alpha\sin\alpha = 8\sin\beta\sin\beta$

$\sin^2\alpha = 2\sin^2\beta$

$\sin\alpha > 0$，$\sin\beta > 0$ であるから

$\sin\alpha = \boxed{\sqrt{2}}\sin\beta$

ソ

$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{2}$ …④

が成り立つので

$$PA\sin\boxed{\alpha} = PB\sin\boxed{\beta}$$

セ　ス

である。この式に，① と ② を代入することにより

$$\sin\boxed{\alpha} = \sqrt{\boxed{2}}\sin\boxed{\beta}$$

セ　ソ（3点）　ス

$$PB = \sqrt{\boxed{2}}\,PA$$

ソ

③から

$PB = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}PA$

$= \sqrt{2}\,PA$ （∵④）

となることがわかる。さらに

$$R_1 = \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$$

タ　チ（3点）

が得られる。

③から

$R_1 = \frac{PA}{2\sin\beta}$

$= \frac{4\sin\alpha}{2\sin\beta}$ （∵①）

$= \boxed{2\sqrt{2}}$ （∵④）

タチ

ス，セ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ セ α	ス ① β

(2) 太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

太郎：△QABの外接円の半径も求められるかな。

花子：(1)のR_1の求め方を参考にすればよさそうだね。

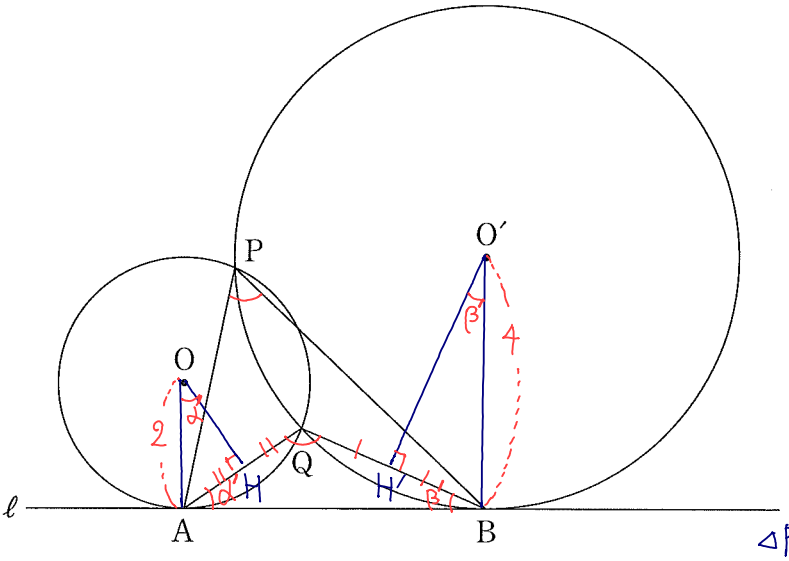


図1（再掲）

Qを(1)のPとみなして
$\angle QAB=\alpha'$, $\angle QBA=\beta'$
として Oから辺AQに垂線OH
O′から辺BQに垂線O′H′
を下ろして同様のことが
成り立つので
$R_1=R_2\ (=2\sqrt{5})$
①ツ

△PAB, △QABに正弦定理を用いて
$\frac{AB}{\sin\angle APB}=2R_1$
$\frac{AB}{\sin\angle AQB}=2R_2$
すなわち
$\sin\angle APB=\frac{AB}{2R_1}$ …⑤
$\sin\angle AQB=\frac{AB}{2R_2}$
$R_1=R_2$であるから
$\sin\angle APB=\sin\angle AQB$
①テ

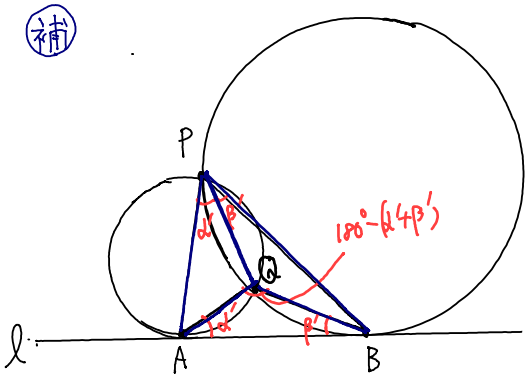
△PAB，△QABの外接円の半径をそれぞれR_1，R_2とおく。このとき，R_1 [＝] R_2である。さらに，sin ∠APB [＝] sin ∠AQBであることもわかる。

①ツ　①テ（ツ，テで3点）

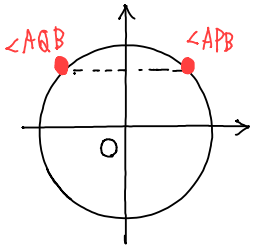
[ツ]，[テ]の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪	<	ツ，テ ①	=	②	>

補



接弦定理を用いて
$\angle APQ=\angle BAQ=\alpha'$
$\angle BPQ=\angle ABQ=\beta'$
$\therefore \angle APB=\alpha'+\beta'$
△ABQの内角から
$\angle AQB=180^\circ-(\alpha'+\beta')$
たしたら180°
よって $\sin\angle APB=\sin\angle AQB$



補 $0^\circ<\angle APB<90^\circ$
$90^\circ<\angle AQB<180^\circ$
である。
↑
IBC第1問につながっていた!?

(3) 太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と △QAB の辺の長さについて考えている。

太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。

花子：∠APB < ∠AQB に注意して求めてみようよ。

鋭角　鈍角

AB = $2\sqrt{7}$ とする。このとき

$$\sin\angle APB = \frac{\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{4}}$$ トナ ニ（2点）

⑤から

$\sin\angle APB = \frac{AB}{2R_1}$ ← $AB=2\sqrt{7}$, $R_1=2\sqrt{2}$

$= \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{14}}{4}$ トナ ニ

$\angle APB=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと

$\sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

である。(1)より，PB = $\sqrt{\boxed{2}}$ PA であるから

ソ

$$PA = \sqrt{\boxed{14}}$$

ヌネ（3点）

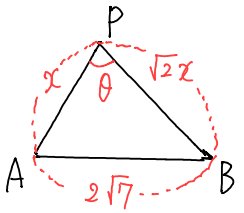
である。

同様に，QA = $\sqrt{7}$ であることがわかる。

PB = $\sqrt{2}$ PA であるから

PA = x とおくと

PB = $\sqrt{2}x$



△PAB に余弦定理を用いて

$(2\sqrt{7})^2 = x^2 + (\sqrt{2}x)^2 - 2\cdot x\cdot\sqrt{2}x\cos\theta$

$28 = x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

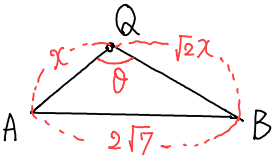
$= 2x^2$

$x^2 = 14$

$\therefore x = \sqrt{14}$

よって　PA = $\boxed{\sqrt{14}}$ ヌネ

補 念のため やると



$\angle AQB=\theta$ $(90°<\theta<180°)$ とおくと

$\sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ← $\cos\theta<0$

右で P を Q として同様で

$28 = x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ ← $\cos\theta$ の値が変わるだけで と同じ

$= 4x^2$

$x^2 = 7$

$\therefore x = \sqrt{7}$

よって，QA = $\sqrt{7}$