数学 I

第 3 問 （配点　30）

〔1〕 $f(x) = 3x^2 + 18x + 20$ とする。

(15点)　$= 3(x+3)^2 - 7$ ← 平方完成

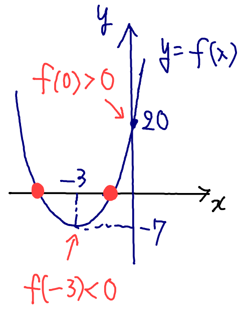
(1) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

($\boxed{-3}$, $\boxed{-7}$)

アイ　ウエ (2点)

である。また，2 次方程式 $f(x) = 0$ は $\boxed{②}$ 。

オ(3点)



$y=f(x)$ のグラフは

頂点 $\boxed{(-3,-7)}$

アイ　ウエ

下に凸

$f(-3) = -7 < 0$

$f(0) = 20 > 0$

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

のグラフは $x<0$ で相異なる2つの共有点をもつ

よって，2次方程式 $f(x)=0$ は異なる2つの負の解をもつ

$\boxed{②}$ オ

$\boxed{オ}$ の解答群

⓪ 異なる二つの正の解をもつ
① 正の解と負の解を一つずつもつ
② 異なる二つの負の解をもつ
③ 実数解をもたない

[次ページ]

(2) (i) $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に s，y 軸方向に -5 だけ平行移動したものは

$y-(-5) = f(x-s)$

より

$y+5 = 3(x-s)^2 + 18(x-s) + 20$

$= 3(x^2 - 2sx + s^2) + 18x - 18s + 20$

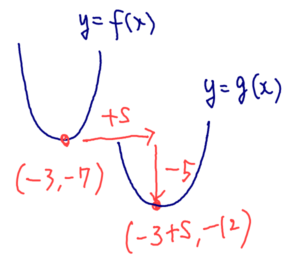
$\therefore\ y = 3x^2 + (-6s+18)x + 3s^2 - 18s + 15$

これが $y = g(x)$ となるので

$g(x) = \boxed{3x^2 + (18-6s)x + 3(s^2-6s+5)}$

カ　キ　ク　ケ

別



$y=g(x)$ は $y=f(x)$ と同じ形で頂点が $(-3+s, -12)$ となることから

$g(x) = 3\{x-(-3+s)\}^2 - 12$

$= 3\{x+(3-s)\}^2 - 12$

$= 3\{x^2 + 2(3-s)x + (3-s)^2\} - 12$

$= 3x^2 + 6(3-s)x + 3(9-6s+s^2) - 12$

$= 3x^2 + (18-6s)x + 3s^2 - 18s + 15$

(2) s を定数とし，$y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に s，y 軸方向に -5 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を $y=g(x)$ とおく。

(i) このとき

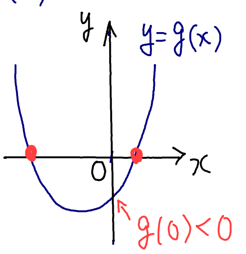
前ページ

$$g(x)=3x^2+\left(18-\boxed{6}\,s\right)x+\boxed{3}\left(s^2-\boxed{6}\,s+\boxed{5}\right)$$

カ　キ　ク　ケ（3点）

である。

(ii)



(ii) 太郎さんと花子さんは，2 次方程式 $g(x)=0$ が 0 でない実数解をもつときの，その解の正負について考えている。

> 太郎：2 次方程式 $g(x)=0$ の実数解の正負が知りたいだけなら，解を具体的に求める必要はないね。
>
> 花子：そうだね。2 次関数 $y=g(x)$ のグラフと，x 軸，y 軸との位置関係を考えればわかるね。

$\begin{cases} y=g(x) \\ y=0 \end{cases}$ のグラフが $x<0,\ 0<x$ で1つずつの共有点をもつことから

$g(0)<0$

$g(0)=3(s^2-6s+5)$
$=3(s-1)(s-5)<0$

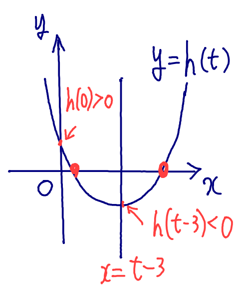
よって $\boxed{1<s<5}$
コ　サ

2 次方程式 $g(x)=0$ が正の解と負の解を一つずつもつような定数 s の値の範囲は $\boxed{1}<s<\boxed{5}$ である。

コ　サ（3点）

(3) t を定数とし，$y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に t，y 軸方向に t^2-6t だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を $y=h(x)$ とおく。2 次方程式 $h(x)=0$ が異なる二つの正の解をもつような定数 t の値の範囲は $\boxed{5}<t<\boxed{7}$ である。

シ　ス（4点）



$\begin{cases} y=h(x) \\ y=0 \end{cases}$ のグラフが $x>0$ で相異なる2つの共有点をもつ

$y=f(x)$ 頂点 $(-3,-7)$ $\xrightarrow[y\text{軸方向に}t^2-6t]{x\text{軸方向に}t}$ 平行移動 $y=h(x)$

頂点 $(-3+t,\ -7+t^2-6t)$
$=(t-3,\ t^2-6t-7)$

$h(x)=3\{x-(t-3)\}^2+t^2-6t-7$
$h(0)=3(t-3)^2+t^2-6t-7$
$=4t^2-24t+20$
$=4(t^2-6t+5)=4(t-1)(t-5)$

$h(0)>0$ より $(t-1)(t-5)>0$
∴ $t<1,\ 5<t$ …①

$y=h(t)$ のグラフの軸 $x=t-3$ が $x>0$ にあるので
$t-3>0$
∴ $t>3$ …②

$y=h(t)$ の頂点の y 座標が負より $t^2-6t-7=(t-7)(t+1)<0$
∴ $-1<t<7$ …③

条件は ①かつ②かつ③であるから

$\boxed{5<t<7}$
シ　ス