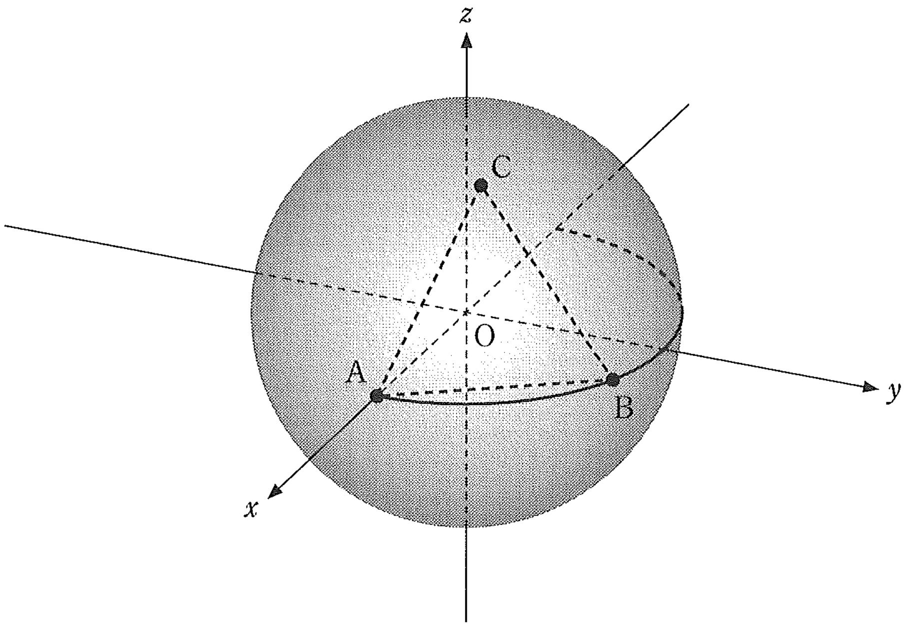
第7問 （選択問題）（配点　16）

Oを原点とする座標空間において，Oを中心とする半径1の球面をSとする。S上に二つの点A(1，0，0)，B$(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)$をとる。ただし，aは$-1<a<1$を満たす実数とする。S上の点Cを，△ABCが正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



参考図

(1) 点Cの座標を$(x,\ y,\ z)$とする。CがS上にあるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\boxed{\text{ア}}$$

である。これをベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の成分を用いて表すと

$$x^2+y^2+z^2=\boxed{\text{ア}} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

（旧数学Ⅱ・旧数学B第7問は次ページに続く。）

さらに，△ABCが正三角形であるとする。△OACと△OABは，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。同様に△OBCと△OABも合同であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}\,y = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。

逆に，実数x，y，zが①，②，③を満たすとき，C$(x,\ y,\ z)$はS上の点であり，△ABCは正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
③ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2$	④ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$	⑤ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ a	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

（旧数学Ⅱ・旧数学B第7問は次ページに続く。）

(2) a に具体的な値を代入して，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i) $a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

$$x=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。この x，y に対して，① を満たす実数 z は $\boxed{\text{サ}}$。したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{サ}}$。

(ii) $a=-\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう。(i) と同様に考えると，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{シ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ ない	① ちょうど一つある	② ちょうど二つある
③ ちょうど三つある	④ ちょうど四つある	⑤ 無限に多くある

(旧数学Ⅱ・旧数学B第7問は次ページに続く。)

(3)　△ABCが正三角形となるS上の点Cがあるための，aに関する条件を見つけよう。

実数x，y，zは，①，②，③を満たすとする。②と③から

$$x = \boxed{\text{ウ}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{ウ}}\left(1 - \boxed{\text{エ}}\right)}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。このとき，①から

$$z^2 = \boxed{\text{ア}} - x^2 - y^2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{1 + a}$$

となる。さらに，$z^2 \geqq 0$，$1 + a > 0$であるから$\boxed{\text{ス}} \geqq 0$である。

逆に，$\boxed{\text{ス}} \geqq 0$のとき，①，②，③を満たす実数x，y，zがあることがわかる。

以上のことから，$\boxed{\text{セ}}$は，△ABCが正三角形となるS上の点Cがあるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ス}}$の解答群

⓪　$1 - 2a$	①　$(1 - a)^2$
②　$(1 + 2a)^2$	③　$(1 + 2a)(1 - a)$
④　$(1 - 2a)(1 - a)$	⑤　$(1 - 2a^2)(1 + 2a)$
⑥　$(1 + 2a^2)(1 - a)$	⑦　$(1 - 2a^2)(1 - a)$

$\boxed{\text{セ}}$の解答群

⓪　$-1 < a < 1$	①　$-1 < a \leqq \frac{1}{2}$	②　$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$
③　$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$	④　$-\frac{1}{2} \leqq a < 1$	⑤　$\frac{1}{2} \leqq a < 1$
⑥　$-1 < a \leqq -\frac{1}{2}$　または　$\frac{1}{2} \leqq a < 1$		
⑦　$-1 < a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$　または　$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a < 1$		