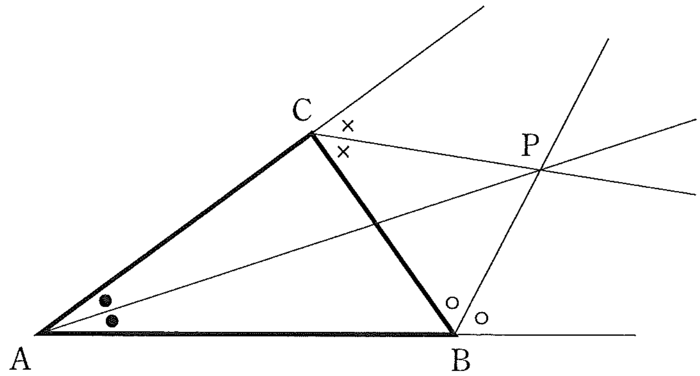
旧数学Ⅱ・旧数学B

第4問 （必答問題）（配点　16）

△ABCにおいて，内角 ∠A の二等分線と，頂点B，Cそれぞれにおける外角の二等分線の3直線は，1点で交わることが知られている。この点をPとする。



参考図

いま，Oを原点とする座標平面において，2点A，Bの座標はそれぞれ$(-1,0)$，$(1,0)$であるとする。また，Sを中心がO，半径が1の円周のy座標が正の部分とし，点CはS上を動くものとする。このとき，$\angle BAC = \theta$とすると，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$であることに注意する。

(1) 太郎さんは，CがS上を動くときのPの軌跡を考えることにした。

(i) 直線APの傾きをmとおくと，$m = \boxed{ア}$であり，直線APの方程式は

$$y = m(x+1) \quad \cdots\cdots ①$$

となる。また，△ABCの頂点Bにおける外角の大きさは$\theta + \dfrac{\pi}{2}$であるから，直線BPの傾きは$\boxed{イ}$である。よって，等式

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

により，直線BPの方程式はmを用いて

$$y = \boxed{ウ}(x-1) \quad \cdots\cdots ②$$

と表せる。

（旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。）

太郎さんはPの座標を$(x,\ y)$として，Pが直線APと直線BP上にあるという条件から，x，yの満たす方程式を求めることにした。

①から得られる$m=\dfrac{y}{x+1}$を②に代入して整理すると，方程式

$$x^2+y^2-\boxed{\text{エ}}\,y-\boxed{\text{オ}}=0$$

が得られる。この方程式が表す図形は，中心が点$\left(0,\ \boxed{\text{カ}}\right)$，半径が$\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$の円である。この円を$E$とする。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\tan\theta$	① $\dfrac{1}{2}\tan\theta$	② $\tan\dfrac{\theta}{2}$
③ $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	④ $\dfrac{1}{2}\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	⑤ $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{\text{ウ}}$の解答群

⓪ m	① $m+1$	② $2m$	③ $\dfrac{1}{m}$
④ $\dfrac{2m+1}{2-m}$	⑤ $\dfrac{m+1}{1-m}$	⑥ $\dfrac{1-m}{1+m}$	⑦ $\dfrac{2m}{1-m^2}$

(旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。)

(ii) 太郎さんと花子さんは，(i)で得られた円Eについて話している。

太郎：円EがPの軌跡なのかな。

花子：Pのy座標が0以下になることはないから，Pの軌跡は円E全体ではないね。

太郎：そうだね。軌跡は円Eのどの部分だろう。

花子：ためしに直線AP上の点が満たす条件を調べてみようか。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$に注意すると，直線APの傾き$m$がとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ であることがわかる。よって，①から，直線AP上の$y > 0$を満たす点$(x,\ y)$について，x，yは $\boxed{\text{ケ}}$ を満たす。

E上の点$(x,\ y)$のうち，$\boxed{\text{ケ}}$ を満たすものすべてを図示すると，$\boxed{\text{コ}}$ の実線部分である。

逆に，$\boxed{\text{コ}}$ の実線部分上にある点は，S上の適当な点Cを選ぶことにより，内角∠Aの二等分線と頂点Bにおける外角の二等分線の交点になることがわかる。

したがって，Pの軌跡は $\boxed{\text{コ}}$ の実線部分である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

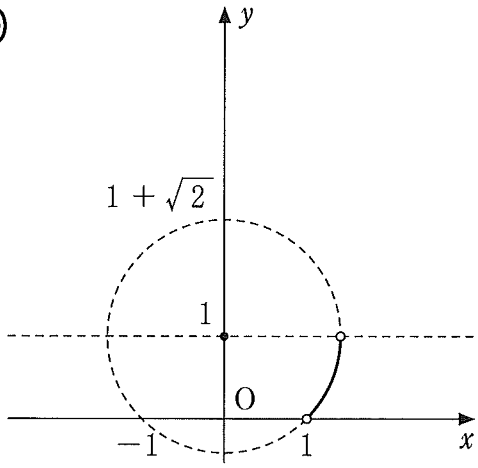
⓪ $m > 0$	① $m > 1$	② $0 < m < 1$	③ $0 < m < 2$

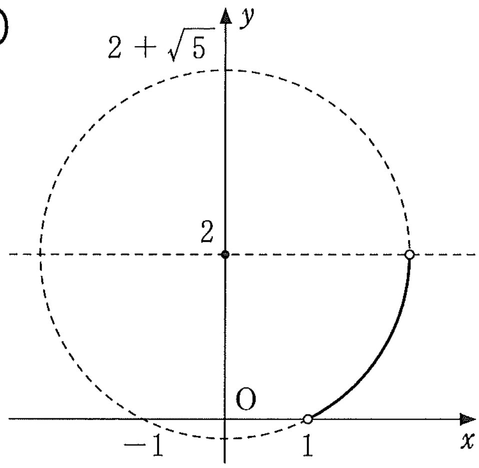
$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

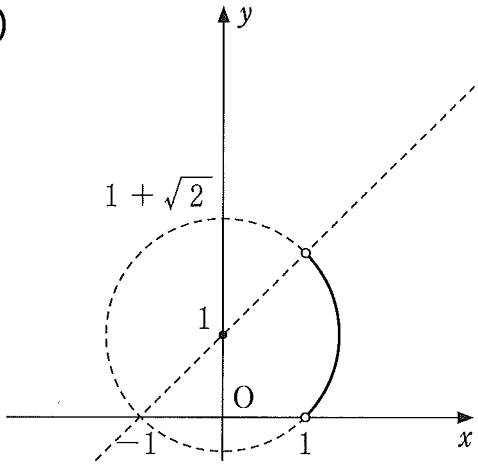
⓪ $0 < x + 1 < y$	① $0 < y < x + 1$
② $0 < 2(x - 1) < y$	③ $0 < y < 2(x - 1)$

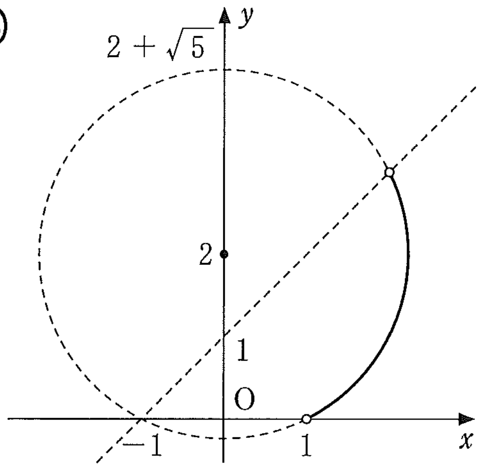
(旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。)

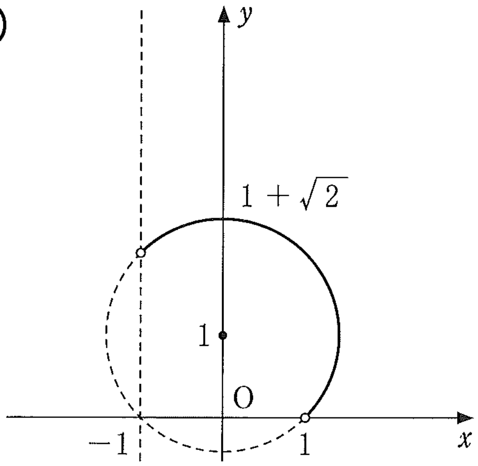
$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

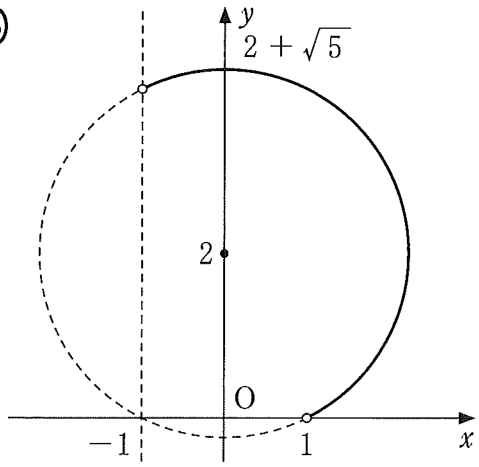
⓪


①


②


③


④


⑤


（旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。）

(2) △ABPにおいて，∠BAPの二等分線と頂点B，Pそれぞれにおける外角の二等分線の3直線が交わる点をQとする。Pが(1)で求めた $\boxed{\text{コ}}$ の実線部分を動くとき，Qの軌跡を考える。

Qの座標を$(x,\ y)$とおき，直線AQの傾きをm'とする。直線BQの傾きはm'を用いて $\boxed{\text{サ}}$ と表される。

Qの軌跡は，直線BQの方程式に$m' =$ $\boxed{\text{シ}}$ を代入して得られるx，yの方程式が表す図形の一部であることがわかる。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $m' + 1$	① $m' + \tan\dfrac{\pi}{8}$
② $\dfrac{1}{m'}$	③ $\dfrac{2m' + 1}{2 - m'}$
④ $\dfrac{m' + 1}{1 - m'}$	⑤ $\dfrac{1 - m'}{1 + m'}$
⑥ $\dfrac{m' + \tan\dfrac{\pi}{8}}{1 - m'\tan\dfrac{\pi}{8}}$	⑦ $\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{8} - m'}{1 + m'\tan\dfrac{\pi}{8}}$

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x - 1}$	① $\dfrac{y}{x + 1}$
② $\dfrac{y}{1 - x}$	③ $\dfrac{y}{x - \tan\dfrac{\pi}{8}}$
④ $\dfrac{y}{x + \tan\dfrac{\pi}{8}}$	⑤ $\dfrac{y}{\tan\dfrac{\pi}{8} - x}$