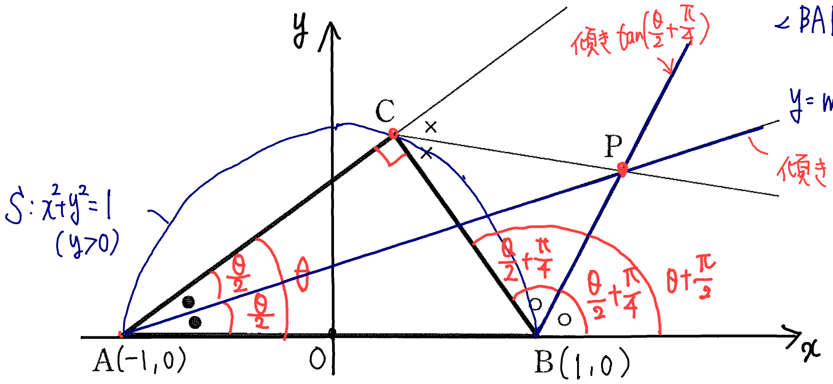
旧数学Ⅱ・旧数学B

第4問 （必答問題）（配点　16）

△ABCにおいて，内角∠Aの二等分線と，頂点B，Cそれぞれにおける外角の二等分線の3直線は，1点で交わることが知られている。この点をPとする。

傍心



参考図

∠BAC=θ より ∠BAP=∠CAP=$\frac{\theta}{2}$

$y=m(x+1)$ …①

傾き $m=\boxed{\tan\frac{\theta}{2}}$ ② ア

点Cは直径ABの円S上を動くので ∠ACB=$\frac{\pi}{2}$

△ABCの点Bの外角は $\theta+\frac{\pi}{2}$

直線BPとx軸正方向とのなす角は $\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$

直線BPの傾きは $\boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ ⑤ イ

$=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+m}{1-m}$

BP: $y=\boxed{\frac{m+1}{1-m}}(x-1)$ …② ⑤ ウ

いま，Oを原点とする座標平面において，2点A，Bの座標はそれぞれ$(-1,0)$，$(1,0)$であるとする。また，Sを中心がO，半径が1の円周のy座標が正の部分とし，点CはS上を動くものとする。このとき，$\angle BAC=\theta$とすると，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$であることに注意する。

(1) 太郎さんは，CがS上を動くときのPの軌跡を考えることにした。

(i) 直線APの傾きをmとおくと，$m=\boxed{\ \text{ア}\ }$ ②（$\tan\frac{\theta}{2}$）ア（2点）であり，直線APの方程式は

$$y=m(x+1) \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。また，△ABCの頂点Bにおける外角の大きさは$\theta+\frac{\pi}{2}$であるから，直線BPの傾きは$\boxed{\ \text{イ}\ }$ ⑤ イ である。よって，等式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

により，直線BPの方程式はmを用いて

$$y=\boxed{\ \text{ウ}\ }(x-1) \qquad \cdots\cdots ②$$

⑤ ウ （イ，ウで3点）

と表せる。

太郎さんはPの座標を$(x,\ y)$として，Pが直線APと直線BP上にあるという条件から，$x,\ y$の満たす方程式を求めることにした。

①から得られる$m=\dfrac{y}{x+1}$を②に代入して整理すると，方程式

$$x^2+y^2-\underset{\text{エ}}{\boxed{2}}\,y-\underset{\text{オ}}{\boxed{1}}=0$$

が得られる。この方程式が表す図形は，中心が点$\left(0,\ \underset{\text{カ}}{\boxed{1}}\right)$，半径が$\sqrt{\underset{\text{キ}}{\boxed{2}}}$の円である。この円を$E$とする。

(エ,オ,カ,キで3点)

ア ， イ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\tan\theta$	① $\dfrac{1}{2}\tan\theta$	ア ② $\tan\dfrac{\theta}{2}$
③ $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	④ $\dfrac{1}{2}\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	イ ⑤ $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

ウ の解答群

⓪ m	① $m+1$	② $2m$	③ $\dfrac{1}{m}$
④ $\dfrac{2m+1}{2-m}$	⑤ $\dfrac{m+1}{1-m}$	⑥ $\dfrac{1-m}{1+m}$	⑦ $\dfrac{2m}{1-m^2}$

①から $m=\dfrac{y}{x+1}$ …①′

②の両辺に$1-m$をかけて

$$(1-m)y=(m+1)(x-1)$$

①′を代入して

$$\left(1-\frac{y}{x+1}\right)y=\left(\frac{y}{x+1}+1\right)(x-1)$$

両辺に$x+1$をかけて

$$(x+1-y)y=(y+x+1)(x-1)$$

$$xy+y-y^2=xy-y+x^2-1$$

$$\underbrace{\boxed{x^2+y^2-2y-1=0}}_{\text{エ　オ}}$$

$$x^2+(y-1)^2=2$$

中心が点$(0,\underset{\text{カ}}{\boxed{1}})$，半径が$\underset{\text{キ}}{\boxed{\sqrt{2}}}$の円Eを表す

[次ページ]

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$なので$0<\tan\dfrac{\theta}{2}<1$

$m=\tan\dfrac{\theta}{2}$であるから $\boxed{0<m<1}$ ②ク

$y>0$のことで①から$x+1>0$であり①′を代入して

$$0<\frac{y}{x+1}<1$$

各辺に$x+1\,(>0)$をかけて $\boxed{0<y<x+1}$ ①ケ

①で直接$0<m<1$としてもわかる

(ii) 太郎さんと花子さんは，(i)で得られた円 E について話している。

太郎：円 E が P の軌跡なのかな。
花子：P の y 座標が 0 以下になることはないから，P の軌跡は円 E 全体ではないね。
太郎：そうだね。軌跡は円 E のどの部分だろう。
花子：ためしに直線 AP 上の点が満たす条件を調べてみようか。

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，直線 AP の傾き m がとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ であることがわかる。よって，①から，直線 AP 上の $y > 0$ を満たす点 $(x,\ y)$ について，$x,\ y$ は $\boxed{\text{ケ}}$ を満たす。

0<m<1 ② ク

0<y<x+1 ① ケ

(ク,ケで2点)

E 上の点 $(x,\ y)$ のうち，$\boxed{\text{ケ}}$ を満たすものすべてを図示すると，$\boxed{\text{コ}}$ の実線部分である。

0<y<x+1 ② コ(3点)

逆に，$\boxed{\text{コ}}$ の実線部分上にある点は，S 上の適当な点 C を選ぶことにより，内角 ∠A の二等分線と頂点 B における外角の二等分線の交点になることがわかる。

② コ

したがって，P の軌跡は $\boxed{\text{コ}}$ の実線部分である。

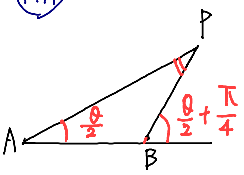
② コ

Pの軌跡は

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=2 \\ 0<y<x+1 \end{cases}$$

より $\boxed{②}$ の実線部分である
コ

補



△ABPの外角に着目して

$\frac{\theta}{2}+\angle APB=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$

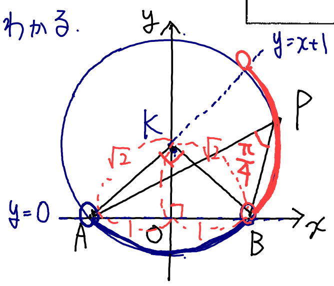
$\therefore \angle APB=\frac{\pi}{4}$

すなわち点Pは円弧ABの円周角$\frac{\pi}{4}$の円周上を動く.

この円の中心をKとすると円周角と中心角の関係を用いて

$\angle AKB=2\angle APB=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

中心K(0,1), 半径$\sqrt{2}$とわかる.



$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

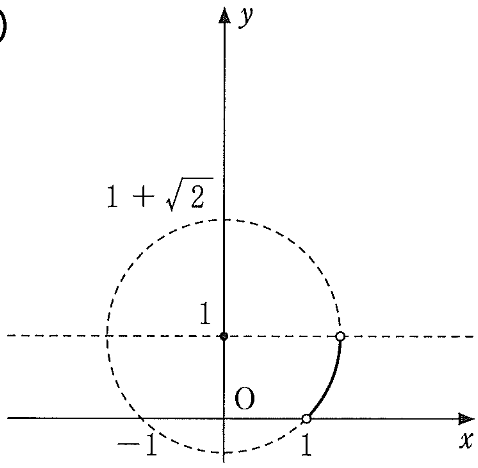
⓪ $m > 0$	① $m > 1$	② $0 < m < 1$	③ $0 < m < 2$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

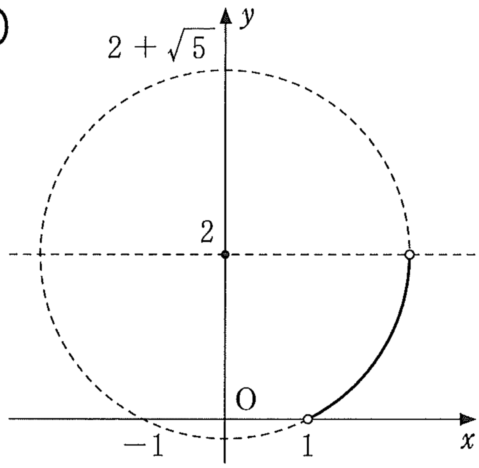
⓪ $0 < x+1 < y$	① $0 < y < x+1$
② $0 < 2(x-1) < y$	③ $0 < y < 2(x-1)$

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

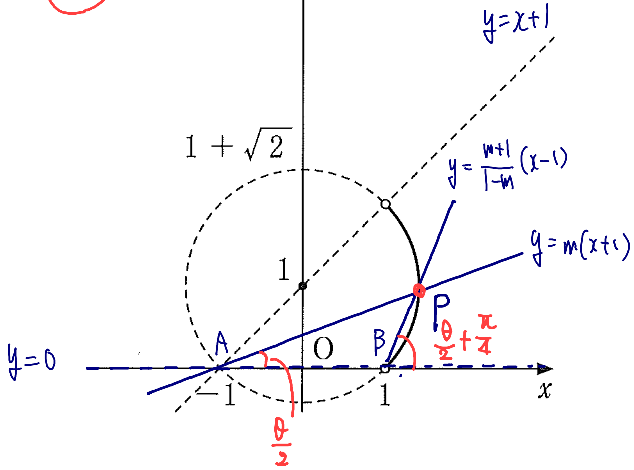
⓪



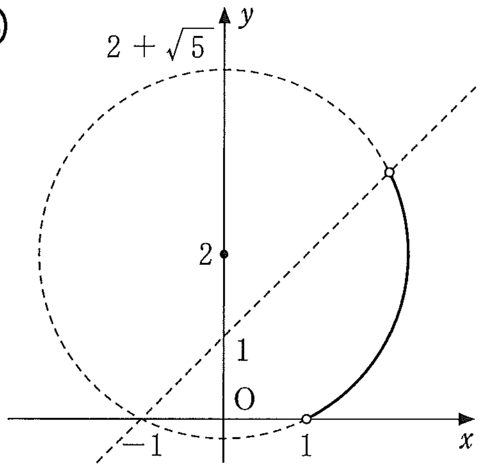
①



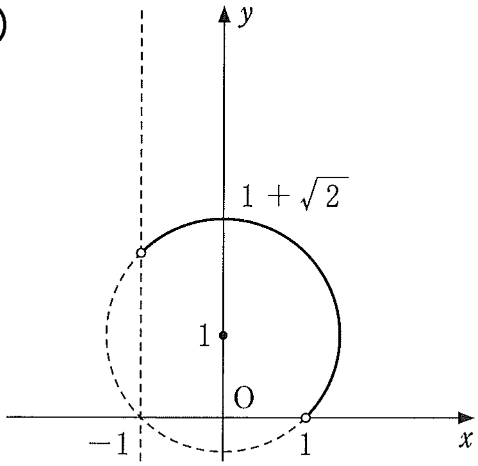
②



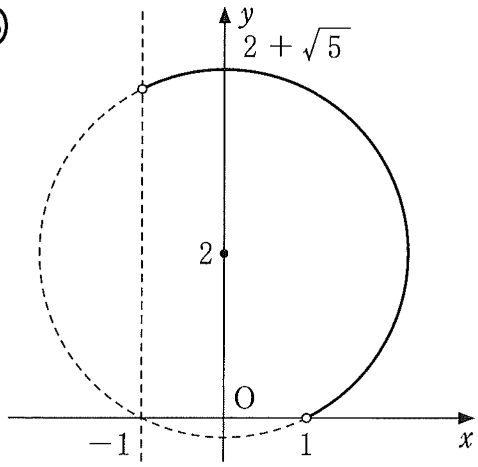
③



④



⑤

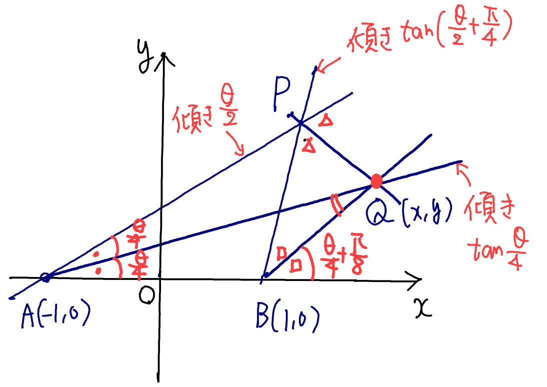


(2)　△ABPにおいて，∠BAPの二等分線と頂点B，Pそれぞれにおける外角の二等分線の3直線が交わる点をQとする。Pが(1)で求めた $\boxed{\text{コ}}$ ② の実線部分を動くとき，Qの軌跡を考える。△ABPの傍心

Qの座標を$(x,\ y)$とおき，直線AQの傾きをm'とする。直線BQの傾きはm'を用いて $\boxed{\text{サ}}$ ⑥ と表される。

Qの軌跡は，直線BQの方程式に $m'=$ $\boxed{\text{シ}}$ ① を代入して得られるx，yの方程式が表す図形の一部であることがわかる。　(サ,シで3点)

(1)と同様にする



直線AQとx軸正方向とのなす角は $\frac{\theta}{4}$　←(1)より $\angle BAD=\frac{\theta}{2}$

直線AQの傾きm'は　$m'=\tan\frac{\theta}{4}$

直線BQとx軸正方向とのなす角は $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{8}$　←(1)より直線BPとx軸正方向とのなす角は $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$

直線BQの傾きは

$$\tan\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\tan\frac{\theta}{4}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\theta}{4}\tan\frac{\pi}{8}}=\boxed{\frac{m'+\tan\frac{\pi}{8}}{1-m'\tan\frac{\pi}{8}}}$$

⑥サ

AQ：$y=m'(x+1)$ …③′

BQ：$y=\dfrac{m'+\tan\frac{\pi}{8}}{1-m'\tan\frac{\pi}{8}}(x+1)$ …④′

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\frac{\theta}{4}<\frac{\pi}{8}$ なので $0<\tan\frac{\theta}{4}<\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$　∴ $0<m'<\sqrt{2}-1$

③′から $m'=\boxed{\dfrac{y}{x+1}}$　①シ

これを④′に代入すると点Qの軌跡は円の一部

$$\begin{cases}0<y<(\sqrt{2}-1)(x+1)\\ x^2+\{y-(\sqrt{2}+1)\}^2=4+2\sqrt{2}\end{cases}$$

であることがわかる。

（左の補のように求めることもできる）

$$\left(\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2\quad\therefore\ \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\right)$$

補　$0<m'<\sqrt{2}-1$ より $0<y<(\sqrt{2}-1)(x+1)$

このもとで

△ABQの外角より

$\frac{\theta}{4}+\angle AQB=\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{8}$

∴ $\angle AQB=\frac{\pi}{8}$

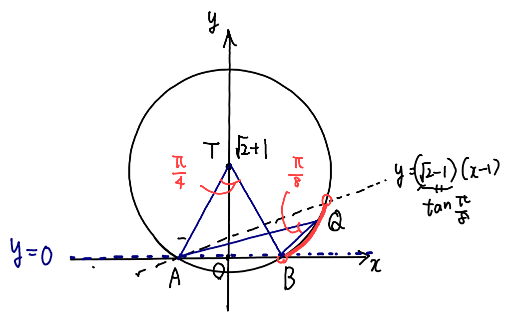
点Qは弦$\overline{AB}$の円周角$\frac{\pi}{8}$の円周上に存在する

この円の中心をTとすると中心角と円周角の関係を用いて

$\angle ATB=2\angle AQB=2\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

O(0,0)として $\frac{OA}{OT}=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ より $OT=\sqrt{2}+1$

∴ $T(0,\sqrt{2}+1)$，半径 $AT=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$



「新教育課程履修者」は，選択できません。

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ $m' + 1$	① $m' + \tan\dfrac{\pi}{8}$
② $\dfrac{1}{m'}$	③ $\dfrac{2m' + 1}{2 - m'}$
④ $\dfrac{m' + 1}{1 - m'}$	⑤ $\dfrac{1 - m'}{1 + m'}$
⑥ $\dfrac{m' + \tan\dfrac{\pi}{8}}{1 - m'\tan\dfrac{\pi}{8}}$	⑦ $\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{8} - m'}{1 + m'\tan\dfrac{\pi}{8}}$

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x - 1}$	① $\dfrac{y}{x + 1}$
② $\dfrac{y}{1 - x}$	③ $\dfrac{y}{x - \tan\dfrac{\pi}{8}}$
④ $\dfrac{y}{x + \tan\dfrac{\pi}{8}}$	⑤ $\dfrac{y}{\tan\dfrac{\pi}{8} - x}$