# 第６問 （配点　16）

(1)　4 次方程式

$$x^4+x^2+24x+9=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。① の左辺を 2 次式の積の形に因数分解することにより，① を解いてみよう。

① を次のように変形する。

$$x^4=-x^2-24x-9 \qquad \cdots\cdots ②$$

② の左辺に $10x^2+25$ を加えると

$$x^4+(10x^2+25)=\left(x^2+\boxed{\text{ア}}\right)^2$$

となる。② の右辺に $10x^2+25$ を加えると

$$-x^2-24x-9+(10x^2+25)=\left(\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2$$

となる。よって，② は

$$\left(x^2+\boxed{\text{ア}}\right)^2=\left(\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

に変形できる。さらに，$\left(\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2$ を移項し，因数分解すると，③ は

$$\left(x^2+\boxed{\text{エ}}x+\boxed{\text{オ}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{カ}}x+\boxed{\text{キ}}\right)=0$$

に変形できる。

よって，② の両辺に $10x^2+25$ を加えることにより，① の左辺を 2 次式の積の形に因数分解することができた。

(旧数学Ⅱ第６問は次ページに続く。)

以上より，① の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{クケ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{2}, \quad \frac{\boxed{\text{サ}} \pm \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,i}{2}$$

であることがわかる。

（旧数学Ⅱ第 6 問は次ページに続く。）

(2) (1)をもとに，4次方程式

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

を解いてみよう。④を次のように変形する。

$$x^4 = 3x^2 - 4x + 3 \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤の左辺に着目しよう。$t$を実数とする。⑤の左辺にある式を加えて，$(x^2 + t)^2$の形に変形したい。そのためには，$\boxed{セ}$を加えればよい。

⑤の右辺に着目しよう。$3x^2 - 4x + 3 + \boxed{セ}$を実数$\alpha$，$\beta$を用いて$(\alpha x + \beta)^2$の形に変形したい。そのためには，$3x^2 - 4x + 3 + \boxed{セ}$が1次式または2次式であることに注意すると，$x$の方程式

$$3x^2 - 4x + 3 + \boxed{セ} = 0 \quad \cdots\cdots ⑥$$

が$\boxed{ソ}$をもたなければならない。

⑥が$\boxed{ソ}$をもつのは，$t = \boxed{タチ}$のときである。このとき，$3x^2 - 4x + 3 + \boxed{セ}$を$(\alpha x + \beta)^2$の形に変形できる。

以上の考察から，④の解は

$$x = \frac{\boxed{ツテ} \pm \sqrt{\boxed{トナ}}}{\boxed{ニ}},\quad \frac{\boxed{ヌ} \pm \sqrt{\boxed{ネ}}\,i}{\boxed{ノ}}$$

であることがわかる。

(旧数学Ⅱ第6問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $tx^2 + t^2$ | ① $2tx^2 + t^2$ | ② $tx^2 + t^4$ | ③ $2tx^2 + t^4$ |
| ④ $2tx^2 + 25$ | ⑤ $2tx^2 + 5t$ | ⑥ $10tx^2 + 25$ | ⑦ $10x^2 + 25t^2$ |

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ 実数解 0 | ① 実数解 1 |
| ② 実数解 $t$ | ③ 異なる二つの実数解 |
| ④ 重解 | ⑤ 異なる二つの虚数解 |