旧数学Ⅱ

第６問　（配点　16）

(1)　4 次方程式

$$x^4 + x^2 + 24x + 9 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。① の左辺を 2 次式の積の形に因数分解することにより，① を解いてみよう。

① を次のように変形する。

$$x^4 = -x^2 - 24x - 9 \qquad \cdots\cdots ②$$

② の左辺に $10x^2 + 25$ を加えると

$$x^4 + (10x^2 + 25) = \left(x^2 + \boxed{5}\right)^2$$

ア（1点）

となる。② の右辺に $10x^2 + 25$ を加えると

$$-x^2 - 24x - 9 + (10x^2 + 25) = \left(\boxed{3}\,x - \boxed{4}\right)^2$$

イ　ウ　（1点）

となる。よって，② は

$$\left(x^2 + \boxed{5}\right)^2 = \left(\boxed{3}\,x - \boxed{4}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

ア　イ　ウ

に変形できる。さらに，$\left(\boxed{3}\,x - \boxed{4}\right)^2$ を移項し，因数分解すると，

イ　ウ

③ は

$$\left(x^2 + \boxed{3}\,x + \boxed{1}\right)\left(x^2 - \boxed{3}\,x + \boxed{9}\right) = 0$$

エ　オ　カ　キ　（3点）

に変形できる。

よって，② の両辺に $10x^2 + 25$ を加えることにより，① の左辺を 2 次式の積の形に因数分解することができた。

② の両辺に $10x^2+25$ を加えると

$x^4 + 10x^2 + 25 = 9x^2 - 24x + 16$

$\boxed{(x^2+5)^2 = (3x-4)^2}$ …③

ア　イ　ウ

$-(3x-4)^2$

$(x^2+5)^2 - (3x-4)^2 = 0$

$\{(x^2+5)+(3x-4)\}\{(x^2+5)-(3x-4)\} = 0$　　$x^2 - Y^2 = (x+Y)(x-Y)$

$\boxed{(x^2+3x+1)(x^2-3x+9) = 0}$

エ　オ　カ　キ

以上より，① の解は

クケ　コ　サ　シ　ス

$$x = \frac{\boxed{-3} \pm \sqrt{\boxed{5}}}{2},\quad \frac{\boxed{3} \pm \boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}\,i}{2}$$

であることがわかる。

(3点)

前ページの変形を用いて

$x^2+3x+1=0$　または　$x^2-3x+9=0$

よって ① の解は

クケ　コ　サ　シス

$$\boxed{x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}}$$

旧数学Ⅱ

(2) (1)をもとに，4次方程式

$$x^4-3x^2+4x-3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を解いてみよう。④を次のように変形する。

$$x^4=3x^2-4x+3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤の左辺に着目しよう。t を実数とする。⑤の左辺にある式を加えて，

2tx²+t²

$(x^2+t)^2$ の形に変形したい。そのためには，$\boxed{①}$ を加えればよい。

セ

⑤の右辺に着目しよう。$3x^2-4x+3+\boxed{①}$ を実数 α，β を用いて

セ

$(\alpha x+\beta)^2$ の形に変形したい。そのためには，$3x^2-4x+3+\boxed{①}$ が1次

セ

式または2次式であることに注意すると，x の方程式

$$3x^2-4x+3+\boxed{①}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

セ

が $\boxed{重解}$ をもたなければならない。

④ソ (2点)

⑥が $\boxed{重解}$ をもつのは，$t=\boxed{-1}$ のときである。このとき，

ソ　　タチ (2点)

$3x^2-4x+3+\boxed{セ}$ を $(\alpha x+\beta)^2$ の形に変形できる。

以上の考察から，④の解は

ツテ　トナ　ヌ　ネ

$$x=\frac{\boxed{-1}\pm\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{2}},\quad \frac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{3}}\,i}{\boxed{2}}$$

ニ　ノ　(2点)

であることがわかる。

展開

$(x^2+t)^2 = x^4+\boxed{2tx^2+t^2}$ ①セ

⑤の右辺に $2tx^2+t^2$ を加えて

$$3x^2-4x+3+2tx^2+t^2=(2t+3)x^2-4x+t^2+3$$

$t=-\frac{3}{2}$ のとき x の1次式 ← x^2 の係数が0

$t\neq-\frac{3}{2}$ のとき x の2次式 ← x^2 の係数が0でない

これを $(\alpha x+\beta)^2$ の形に変形したいので $t\neq-\frac{3}{2}$ が必要で

$$(2t+3)x^2-4x+t^2+3=0$$

← $(2t+3)x^2-4x+t^2+3=(\alpha x+\beta)^2$ に変形したい

が $\boxed{重解}$ をもつ

④ソ

判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=4-(2t+3)(t^2+3)=-(2t^3+3t^2+6t+5)=-(t+1)(2t^2+t+5)$$

$2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

$D=0$ であり t は実数なので $t=\boxed{-1}$ タチ

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ & & -2 & -1 & -5 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

セ の解答群

⓪ tx^2+t^2	① $2tx^2+t^2$	② tx^2+t^4	③ $2tx^2+t^4$
④ $2tx^2+25$	⑤ $2tx^2+5t$	⑥ $10tx^2+25$	⑦ $10x^2+25t^2$

ソ の解答群

⓪ 実数解 0	① 実数解 1
② 実数解 t	③ 異なる二つの実数解
④ 重解	⑤ 異なる二つの虚数解

前ページをふまえ

$$x^4 = 3x^2-4x+3 \quad \cdots ⑤$$

両辺に $-2x^2+1$ を加えて

$$x^4-2x^2+1 = x^2-4x+4$$

$$(x^2-1)^2 = (x-2)^2 \quad 2-(x-2)^2$$

$$(x^2-1)^2-(x-2)^2 = 0 \quad 2\ \ X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$$

$$\{(x^2-1)+(x-2)\}\{(x^2-1)-(x-2)\} = 0$$

$$(x^2+x-3)(x^2-x+1) = 0$$

$$x^2+x-3=0 \quad \text{または} \quad x^2-x+1=0$$

よって ④ の解は

$$\boxed{x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

ツテ　トナ　ヌ　ネ

ニ　ノ