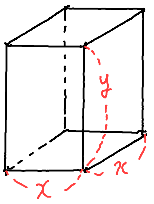
旧数学Ⅱ

第４問 （配点　16）



底面が正方形である直方体に対して，様々な条件のもとで，体積の最大値を求めることを考える。x，y を正の実数とし，底面の一辺の長さを x，高さを y とする。

(1) 直方体のすべての辺の長さの和が４であるとき，直方体の体積 V の最大値を求めよう。

直方体のすべての辺の長さの和が４であるから，x，y は $\boxed{⓪}$ を満たす。

$2x+y=1$　ア（2点）

よって，$x>0$ かつ $y>0$ から，x のとり得る値の範囲は $0<x<\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ であり，y のとり得る値の範囲は $0<y<\boxed{1}$ である。また，体積 V を x のみの式で表すと $V=\boxed{③}$ であり，y のみの式で表すと $V=\boxed{①}$ である。

イ　ウ　エ　（イ,ウ,エで2点）　オ（2点）　カ（2点）

以上から，$V=\boxed{オ}$ と $V=\boxed{カ}$ のどちらを用いても，体積 V の最大値は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{27}}$ であることがわかる。このときの直方体は $\boxed{立方体}$ である。

キ　クケ（2点）　⓪コ（2点）

$8x+4y=4$，

両辺を4で割って

$\boxed{2x+y=1}$ …①　⓪ア

$y=-2x+1$ …①′

$y>0$ より

$-2x+1>0$

$\therefore\ x<\frac{1}{2}$

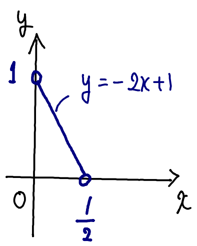
$x>0$ と合わせて

$\boxed{0<x<\frac{1}{2}}$　イ　ウ

①′から

$0<y<1$

補　$x>0$, $y>0$ のもとで $y=-2x+1$ のグラフを描くと



グラフより

$0<x<\frac{1}{2}$

$0<y<1$

はすぐにわかる

$V=x^2y$

①′を代入して　　yを消して xのみに

$V=x^2(-2x+1)$

$=\boxed{-2x^3+x^2}$　③オ

①から $x=\dfrac{1-y}{2}$ となり，これを代入して

$V=\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2y$　　xを消して yのみに

$=\dfrac{(1-2y+y^2)y}{4}$

$=\boxed{\frac{1}{4}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y}$　①カ

$V(x)=-2x^3+x^2\ \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$

とすると

$V'(x)=-6x^2+2x$

$=-2x(3x-1)$

$V'(x)=0$ とすると $x=0,\ \frac{1}{3}$

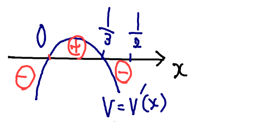
$x=\frac{1}{3}$ のとき V は最大で

このとき ①から $y=\frac{1}{3}$

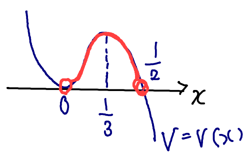
よって，V の最大値は $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boxed{\frac{1}{27}}$　キ　クケ

このときの直方体は一辺の長さが $\frac{1}{3}$ の $\boxed{立方体}$

⓪コ



x	(0)	…	$\frac{1}{3}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	



補　$V(y)=\frac{1}{4}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y\ (0<y<1)$

とすると

$V'(y)=\frac{3}{4}y^2-y+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(3y^2-4y+1)$

$=\frac{1}{4}(3y-1)(y-1)$

y	(0)	…	$\frac{1}{3}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$V'(y)$		$+$	0	$-$	
$V(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $2x+y=1$	① $2x+y=4$	② $x+2y=1$
③ $x+2y=4$	④ $x+y=1$	⑤ $2x+2y=1$

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $-2x^3+4x^2$	① $-\frac{1}{2}x^3+2x^2$	② $-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2$
③ $-2x^3+x^2$	④ $-x^3+x^2$	⑤ $-x^3+\frac{1}{2}x^2$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{4}y^3-2y^2+4y$	① $\frac{1}{4}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y$
② $4y^3-4y^2+y$	③ $y^3-y^2+\frac{1}{4}y$
④ y^3-2y^2+y	⑤ $4y^3-16y^2+16y$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 立方体

① $x:y=1:2$ を満たす直方体

② $x:y=1:4$ を満たす直方体

③ $x:y=2:1$ を満たす直方体

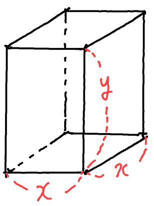
④ $x:y=4:1$ を満たす直方体

旧数学Ⅱ

(2) 底面が正方形である直方体に対して，(1)では次の条件のもとで，**方法M**を用いて体積の最大値を求めることができた。

(1)の条件：直方体のすべての辺の長さの和が4である。

> **方法M**
>
> 直方体の体積を x の3次関数または y の3次関数として表し，その最大値を求める方法



$V = x^2 y$

底面が正方形である直方体に対して，(1)の条件を次の各条件(a)，(b)に置き換えたときの体積を考える。

(a) 直方体の表面積が1である。

(b) 直方体の対角線の長さが1である。 ← 次ページに参考図がある

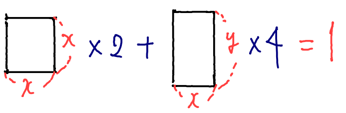
底面が正方形である直方体に対して，各条件(a)，(b)のもとで，**方法M**を用いて体積の最大値を求めることができるかどうかの組合せとして，正しいものは $\boxed{\text{⓪}}$ である。 ↖最大値は求めなくてよい

サ(4点)

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	できる	できる	できない	できない
(b)	できる	できない	できる	できない

$\boxed{(a)}$ 直方体の表面積が1のとき



より

$2x^2 + 4xy = 1$

$\therefore \boxed{xy} = \dfrac{1-2x^2}{4}$

$V = x^2y = x \cdot \boxed{xy} = x \cdot \dfrac{1-2x^2}{4}$

$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x \quad (0<x<\frac{1}{\sqrt{2}})$

V を x の3次関数として表せたので，V の最大値を求めることができる

$\boxed{(b)}$ 直方体の対角線の長さが1のとき

$2x^2 + y^2 = 1$

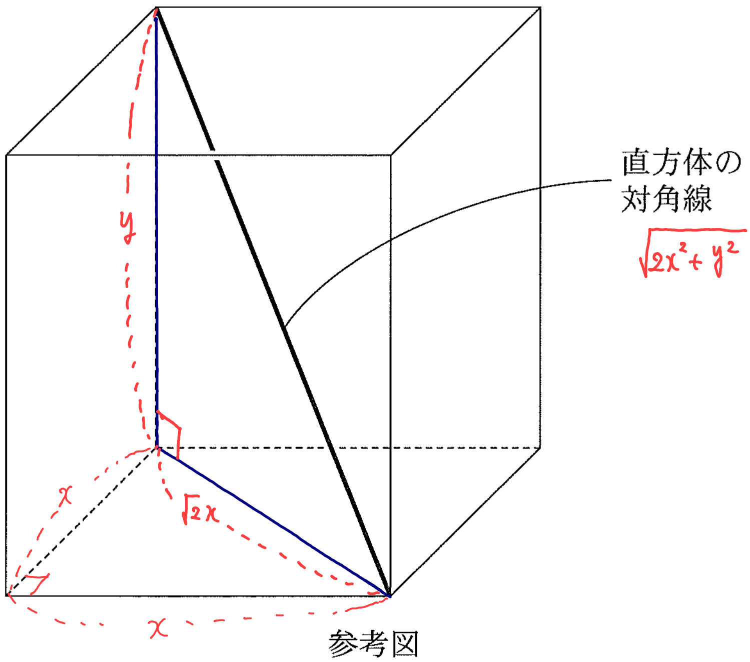
$\therefore x^2 = \dfrac{1-y^2}{2}$

$V = x^2y = \dfrac{1-y^2}{2}y$

$= -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y \quad (0<y<1)$

V を y の3次関数として表せたので，V の最大値を求めることができる

よって $\boxed{0}$ // サ



参考図