第４問 （選択問題）（配点　20）

(1)　702 を素因数分解すると

$$702 = 2 \times 3^{\boxed{3}} \times \boxed{13}$$

ア　イウ　(2点)

となる。702 の正の約数の個数は $\boxed{16}$ 個である。

エオ(3点)

(2)　不定方程式

$$9x - 23y = 1$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{18}, \quad y = \boxed{7}$$

カキ　ク　(3点)

である。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 702 \\ 3 & 351 \\ 3 & 117 \\ 3 & 39 \\ & 13 \end{array}$$

$702 = \boxed{2 \cdot 3^3 \cdot 13}$

702の正の約数の個数は

$2^{0,1} \cdot 3^{0,1,2,3} \cdot 13^{0,1}$

$2 \times 4 \times 2 = \boxed{16}$ (個)

$9x - 23y = 1 \quad \cdots ①$

$9x - (9 \cdot 2 + 5)y = 1$

$9(x - 2y) - 5y = 1$

$\quad\ \ 4 \qquad\quad\ 7$

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ y = 7 \end{cases} \quad \therefore x = 18,\ y = 7$

これをすぐ答えにしてよい

$9 \cdot 18 - 23 \cdot 7 = 1 \quad \cdots ②$

① − ② として

$9(x-18) - 23(y-7) = 0$

$9(x-18) = 23(y-7)$

$x-18,\ y-7$ はともに整数

9, 23 は互いに素

であるから，k を整数として

$\begin{cases} x - 18 = 23k \\ y - 7 = 9k \end{cases}$

すなわち $\begin{cases} x = 23k + 18 \\ y = 9k + 7 \end{cases}$

と表せる。

xが正の整数で最小になるのは $k=0$ のときで

$\boxed{x = 18,\ y = 7}$

カキ　ク

別

$x = \dfrac{23y+1}{9}$

xが正の整数 より $23y + 1 > 0$

yは整数 なので $y = 0, 1, 2, \cdots$

$x = \dfrac{(9 \cdot 2 + 5)y + 1}{9} = \dfrac{9 \cdot 2y + 5y + 1}{9}$

$= 2y + \dfrac{5y+1}{9}$

$5y+1$ が 9の倍数になることから

$y \neq 0,1,2,3,4,5,6$ で $y=7$ でみたし

$x = 2 \cdot 7 + \dfrac{36}{9} = 14 + 4$

$= 18$

よって　$x = 18,\ y = 7$

別

mod 9 として

$-23y \equiv -9x + 1$

$4y \equiv 1$

$\equiv 28$

$\therefore y \equiv 7$

$-23 \cdot 7 \equiv -9x + 1$

$9x \equiv 162$

$\therefore x \equiv 18$

(3) 太郎さんと花子さんは，次の二つの条件(A)，(B)を満たす正の整数 n について考えている。

$2\cdot3^3\cdot13=3^2\cdot2\cdot3\cdot13$

(A) n と 702 の最大公約数が 9 である。

$\begin{cases} n=9\square \\ 702=9\triangle \end{cases}$ ($\square$,$\triangle$は互いに素な整数)

(B) n を 23 で割った余りが 6 である。

$n=23\,\nabla+6$ 整数

(i) 二人は，条件(A)について話をしている。

太郎：まず，条件(A)を満たす n について考えてみようよ。

花子：条件(A)から n は 9 で割り切れることがわかるね。

太郎：702 を 9 で割ると 78 になるね。

花子：n を 9 で割ったときの商と 78 との間にどのような関係があるかな。

条件(A)より，n はある正の整数 m を用いて，$n=9m$ と表されることがわかる。このとき，m に関する記述として，次の⓪～②のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ ② である。

ケ(2点)

(A)より

$\begin{cases} n=9m \\ 702=9\cdot78 \end{cases}$ (mは正の整数，mと78は互いに素)

と表せるので

$\boxed{m\text{と}78\text{の最大公約数が}1}$ ②ケ

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ m は 78 の倍数である。
① m は 1 と 78 以外の 78 の約数である。
② m と 78 の最大公約数は 1 である。

旧数学Ⅰ・旧数学A

(ii) 二人は，次のように話している。

> 太郎：条件(A)と条件(B)をともに満たす n を求めるには，どうすればいいのかな。
>
> 花子：n は9の倍数であり，また23で割った余りが6であるから，不定方程式 $9x = 23y + 6$ の整数解を利用することができそうだね。

$x = \boxed{18}$（カキ），$y = \boxed{7}$（ク）が不定方程式 $9x = 23y + 1$ の整数解であることを用いると，不定方程式

$9\cdot 18 = 23\cdot 7 + 1$

両辺に6をかけて

$9(18\times 6) = 23(7\times 6) + 6$ …④

$$9x = 23y + 6 \quad \cdots ③$$

③−④として　$9(x - 18\times 6) = 23(y - 7\times 6)$

$x - 18\times 6$, $y - 7\times 6$ はともに整数，9と23は互いに素であるから

$\begin{cases} x - 18\times 6 = 23k \\ y - 7\times 6 = 9k \end{cases}$

すなわち $\boxed{x = 18\times 6 + 23k,\ y = 7\times 6 + 9k}$ と表される
（コサ）（シ）

のすべての整数解は，k を整数として

$$x = \boxed{18} \times 6 + \boxed{23}\,k, \quad y = \boxed{7} \times 6 + \boxed{9}\,k$$

カキ　コサ　ク　シ　(2点)

と表される。

(iii) (i)と(ii)より，条件(A)と条件(B)をともに満たす正の整数 n のうち最小のものは $\boxed{765}$ であることがわかる。

スセソ (4点)

(i) より $n = 9m$ (mは正の整数，mと78は互いに素)と表せる.

(B) より 整数 l を用いて $n = 23l + 6$ と表せる

これらのことから　$9m = 23l + 6$ と表せて(ii)を用いて

$m = 18\times 6 + 23k$　　(x, y)を(m, l)としただけ

$= 23k + 108$

$= 23(k+4) + 16$

m は正の整数なので $k+4 = 0, 1, 2, 3, \cdots$

これをみたす m で $78 (= 2\cdot 3\cdot 13)$ と互いに素であるものを調べると

mは2, 3, 13の素因数をもたない

$k+4$	m	
0	$16 = 2^4$	×
1	$39 = 3\cdot 13$	×
2	$62 = 2\cdot 31$	×
3	$85 = 5\cdot 17$	○

よって 正の整数 n で最小のものは

$m = 85$ のときで

$n = 9\cdot 85$

$= \boxed{765}$ スセソ

(4)　次の命題 (a)，(b)，(c) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{③}$ である。
タ(4点)

(a)　702 との最大公約数が 9 であり，かつ 23 で割った余りが 4 である正の整数が存在する。

(b)　702 との最大公約数が 9 であり，かつ 24 で割った余りが 7 である正の整数が存在する。

(c)　702 との最大公約数が 9 であり，かつ 24 で割った余りが 6 である正の整数が存在する。

$\boxed{タ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

(a), (b), (c) のそれぞれで正の整数 n が存在すると仮定すると
(a), (b), (c) いずれも $n=9m$ (m は正の整数，m と 78 は互いに素) と表せる

(a)　n は 23 でわって余りが 4 であるので，整数 l を用いて

$$9m = 23l + 4$$

と表せる

$$9\cdot 3 = 23\cdot 1 + 4$$

$$9(m-3) = 23(l-1)$$

整数 k を用いて　$m = 23k + 3$

と表せて
$k=2$ で　$m = 49 = 7^2$ がある
ゆえに　$n = 9\cdot 7^2$ が存在するので (a) は真

別　(ii) で 6 を 4 にすることを考えて

$$m = 18\times 4 + 23k$$
$$= 23k + 72$$

$k=-1$ として　$m = 49$

(b)　n は 24 でわって余りが 7 であるので，整数 l を用いて

$$9m = 24l + 7$$

と表せるが

$$3(3m-8l) = 7$$

$$(3\text{の倍数}) = 7$$

どのような整数 m, l に対しても成り立たない
ゆえに　n は存在しないので (b) は偽

(c)　n は 24 でわって余りが 6 であるので，整数 l を用いて

$$9m = 24l + 6$$

と表せる
両辺を 3 でわって　$3m = 8l + 2$
$= 2(4l+1)$

m, $4l+1$ はともに整数，2 と 3 は互いに素であるから
m は 2 の倍数となり　m と 78 は互いに素にならない.
m と 78 はともに 2 の倍数
ゆえに　n は存在しないので (c) は偽

よって正しいものは $\boxed{③}$ タ