旧数学Ⅰ・旧数学A

〔2〕 図1のように，直線ℓ上の点Aにおいてℓに接する半径2の円を円Oとし，ℓ上の点Bにおいてℓに接する半径4の円を円O′とする。円OとO′は2点で交わるとし，その交点をP，Qとする。ただし，$\angle \mathrm{APB} < \angle \mathrm{AQB}$とする。さらに，$\angle \mathrm{PAB}$は鋭角であるとする。このとき，$\triangle \mathrm{PAB}$と$\triangle \mathrm{QAB}$について考えよう。

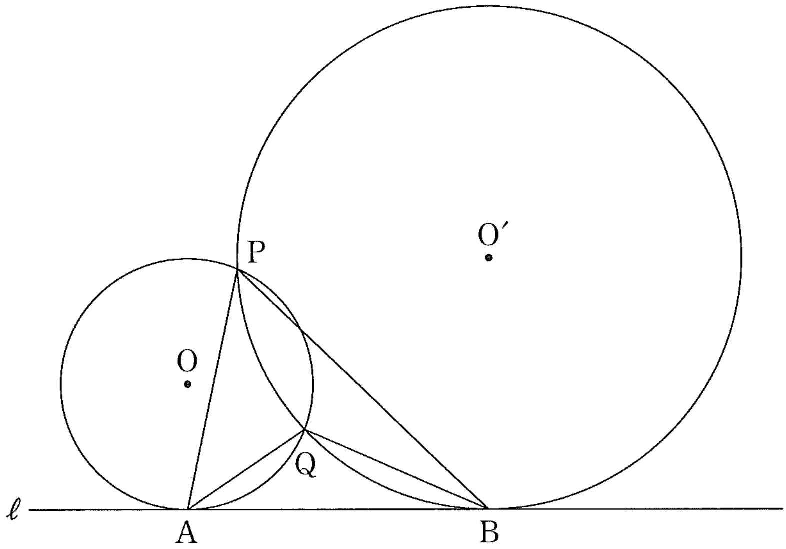

図 1

(1) $\angle \mathrm{PAB} = \alpha$，$\angle \mathrm{PBA} = \beta$とおく。

円Oの中心Oから直線PAに引いた垂線と直線PAとの交点をHとする。$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$であるから，$\angle \mathrm{AOH} = \alpha$である。よって，$\triangle \mathrm{OAH}$に着目すると，$\mathrm{AH} = \boxed{\text{コ}}\sin\alpha$であるから

$$\mathrm{PA} = 2\,\mathrm{AH} = \boxed{\text{サ}}\sin\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(旧数学Ⅰ・旧数学A第1問は次ページに続く。)

同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると

$$\mathrm{PB} = 2\,\mathrm{BH'} = \boxed{\text{シ}}\sin\beta \qquad \cdots\cdots ②$$

であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\boxed{\text{ス}}} = \frac{\mathrm{PB}}{\sin\boxed{\text{セ}}} = 2R_1$$

が成り立つので

$$\mathrm{PA}\sin\boxed{\text{セ}} = \mathrm{PB}\sin\boxed{\text{ス}}$$

である。この式に，① と ② を代入することにより

$$\sin\boxed{\text{セ}} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,\sin\boxed{\text{ス}}$$

$$\mathrm{PB} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,\mathrm{PA}$$

となることがわかる。さらに

$$R_1 = \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

が得られる。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ α	① β

(旧数学Ⅰ・旧数学A第1問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。

花子：(1)の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

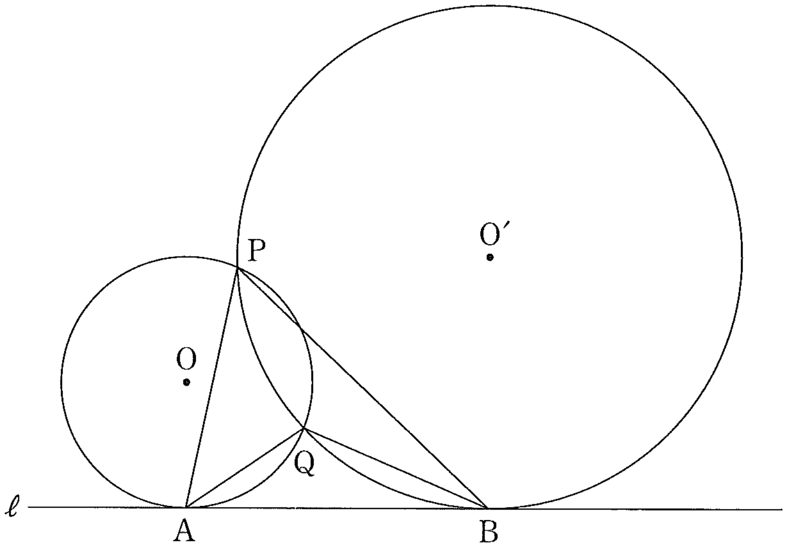

図 1 (再掲)

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，R_1 [ツ] R_2 である。さらに，$\sin \angle APB$ [テ] $\sin \angle AQB$ であることもわかる。

[ツ]，[テ] の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(旧数学Ⅰ・旧数学A第 1 問は次ページに続く。)

(3) 太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と △QAB の辺の長さについて考えている。

太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。

花子：∠APB ＜ ∠AQB に注意して求めてみようよ。

$AB = 2\sqrt{7}$ とする。このとき

$$\sin \angle APB = \frac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。(1) より，$PB = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\ PA$ であるから

$$PA = \sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}$$

である。

同様に，$QA = \sqrt{7}$ であることがわかる。