数学Ⅱ・数学B　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第5問 （選択問題）（配点　20）

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-8\\10\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-9\\8\\-4\end{pmatrix}$

点Oを原点とする座標空間に4点A(2，7，−1)，B(3，6，0)，C(−8，10，−3)，D(−9，8，−4)がある。A，Bを通る直線をℓ_1とし，C，Dを通る直線をℓ_2とする。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$=\boxed{(1,-1,1)}$ ア，イウ，エ

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-9\\8\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\10\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1\cdot(-1)$

$=-1+2-1$

$=\boxed{0}$ オ

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

(1)

$\overrightarrow{AB}=\left(\boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1}\right)$ （2点）

ア　イウ　エ

であり，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\boxed{0}$である。

オ（2点）　← このおかげで後半の計算がやりやすい

(2)　花子さんと太郎さんは，点Pがℓ_1上を動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$が最小となるPの位置について考えている。

$\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$

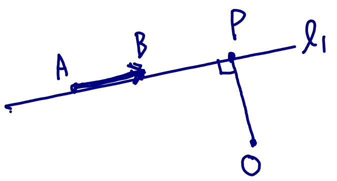
Pがℓ_1上にあるので，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$を満たす実数$s$があり，$\overrightarrow{OP}=\boxed{2}$が成り立つ。

カ（3点）

$|\overrightarrow{OP}|$が最小となるsの値を求めればPの位置が求まる。このことについて，花子さんと太郎さんが話をしている。

花子：$|\overrightarrow{OP}|^2$が最小となるsの値を求めればよいね。

太郎：$|\overrightarrow{OP}|$が最小となるときの直線OPとℓ_1の関係に着目してもよさそうだよ。



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\boxed{\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}}$ ②カ

$=\begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}s+2\\-s+7\\s-1\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(s+2)^2+(-s+7)^2+(s-1)^2$

$=\boxed{3s^2-12s+54}$

キ　クケ　コサ

$=3(s-2)^2+42$

$s=2$

$\boxed{s=2}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最小になる

ス

補　$|\overrightarrow{OP}|$の最小値は$\sqrt{42}$

別

$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{OA}|^2+2s\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s^2|\overrightarrow{AB}|^2$

$=54+2s(-6)+s^2\cdot 3$

$=3s^2-12s+54$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \boxed{3}\,s^2 - \boxed{12}\,s + \boxed{54}$ である。
キ　クケ　コサ(3点)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき，直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると $\boxed{①}$ が成り立つことがわかる。
シ (3点)

花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも，$s = \boxed{2}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる。
ス (3点)

カ の解答群

⓪ $s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	① $s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
② $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	③ $(1-2s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
④ $(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	

シ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} > 0$	① $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$
② $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} < 0$	③ $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$
④ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$
⑥ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert\,\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$	

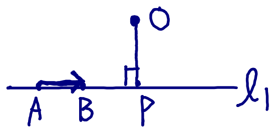
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小になるとき

$\mathrm{OP} \perp \ell_1$

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0}$ ①シ



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$
$$= 2-7-1 + s\{1^2+(-1)^2+1^2\}$$
$$= -6 + 3s = 0$$
$$\therefore \boxed{s = 2}$$ ス

(3) 点Pがℓ_1上を動き，点Qがℓ_2上を動くとする。このとき，線分PQの長さが最小になるPの座標は$\left(\boxed{-3}, \boxed{12}, \boxed{-6}\right)$，Qの座標は$\left(\boxed{-7}, \boxed{12}, \boxed{-2}\right)$である。

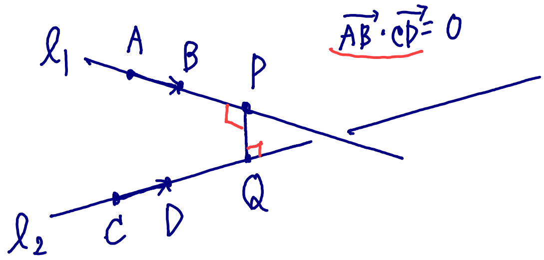
セソ　タチ　ツテ

トナ　ニヌ　ネノ

（両方正解で4点）

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$



s, t を実数として

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CD}$$

と表せて

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{CD}-s\overrightarrow{AB}$$

PQが最小になる条件は

$PQ\perp\ell_1$ かつ $PQ\perp\ell_2$

すなわち

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CD}$

であるから

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}&=\{\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{CD}-s\overrightarrow{AB}\}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t\,\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}_{0}-s|\overrightarrow{AB}|^2\\&=-15-3s=0\end{aligned}$$

$\therefore\ s=-5$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}&=\{\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{CD}-s\overrightarrow{AB}\}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+t|\overrightarrow{CD}|^2-s\,\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}_{0}\\&=6+6t=0\end{aligned}$$

$\therefore\ t=-1$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\12\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-8\\10\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\12\\-2\end{pmatrix}$$

よってPQが最小になるのは $\boxed{P(-3, 12, -6),\ Q(-7, 12, -2)}$

セソ タチ ツテ　トナ ニヌ ネノ

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-8\\10\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=1\cdot(-10)+(-1)\cdot3+1\cdot(-2)\\&=-10-3-2\\&=-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=1^2+(-1)^2+1^2\\&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}&=(-10)(-1)+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)\\&=10-6+2\\&=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CD}|^2&=(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2\\&=1+4+1\\&=6\end{aligned}$$

別）
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=|\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{CD}-s\overrightarrow{AB}|^2\\&=|\overrightarrow{AC}|^2+t^2|\overrightarrow{CD}|^2+s^2|\overrightarrow{AB}|^2+2t\,\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}}_{6}-2st\,\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}_{0}-2s\,\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{-15}\\&=113+6t^2+3s^2+12t+30s\\&=3s^2+30s+6t^2+12t+113\\&=3\underbrace{(s+5)^2}_{0以上}+6\underbrace{(t+1)^2}_{0以上}+32\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PQ}|$が最小になるのは

$s=-5$ かつ $t=-1$

補）PQの最小値は $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ の大きさなので

$$|\overrightarrow{PQ}|=4\sqrt{2}$$