第４問　（選択問題）（配点　20）

$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 14 \end{cases}$

$a_2 = a_1 + 14 = 10+14 = \boxed{24}$ アイ

$a_3 = a_2 + 14 = 24+14 = \boxed{38}$ ウエ

(1)　数列$\{a_n\}$が

$$a_{n+1} - a_n = 14 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする。

$a_1 = 10$ のとき，$a_2 = \boxed{24}$（アイ），$a_3 = \boxed{38}$（ウエ）である。（アイ，ウエ両方正解で２点）

数列$\{a_n\}$の一般項は，初項a_1を用いて

$$a_n = a_1 + \boxed{14}(n-1)$$

（オカ）（２点）

と表すことができる。

数列$\{a_n\}$は公差14の等差数列であるから

$a_n = a_1 + \boxed{14}(n-1)$ オカ

(2)　数列$\{b_n\}$が

$$2b_{n+1} - b_n + 3 = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする。

数列$\{b_n\}$の一般項は，初項b_1を用いて

$$b_n = \left(b_1 + \boxed{3}\right)\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)^{n-1} - \boxed{3}$$

（キ，ク，ケ，コ）（３点）

と表すことができる。

（数学Ⅱ・数学B第４問は次ページに続く。）

$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{rl} -\big) & \alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \iff \alpha = -3 \\ \hline & b_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(b_n - \alpha) \end{array}\right)$$

変形して

$b_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}(b_n + 3)$

数列$\{b_n + 3\}$は初項$b_1 + 3$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列であるから

$b_n + 3 = (b_1 + 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって

$b_n = \boxed{(b_1 + 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3}$ キクケコ

(3) 太郎さんは

$$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす数列$\{c_n\}$について調べることにした。

①で $n=1$ として $(c_1+3)(2c_2-c_1+3)=0$

$c_1=5$ のとき $8(2c_2-2)=0$

$\therefore C_1=\boxed{1}$ サ

(i)

- 数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_1=5$ のとき，$c_2=\boxed{1}$ である。
  サ (1点)
- 数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$ のとき，$c_2=\boxed{-3}$，$c_1=\boxed{-3}$ である。
  シス　セソ (シス, セソ両方正解で2点)

①で $n=2$ として $(c_2+3)(2c_3-c_2+3)=0$

$c_3=-3$ のとき $(c_2+3)(-c_2-3)=0$

$-(c_2+3)^2=0$

$\therefore c_2=\boxed{-3}$ シス

同様にして $c_1=\boxed{-3}$ セソ

(ii) 太郎さんは，数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$ となる場合について考えている。

$c_1=c_2=-3$ は (i) で示している

$c_3=-3$ のとき，c_4がどのような値でも

$$(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0$$

が成り立つ。

①で $n=4$ として $(c_4+3)(2c_5-c_4+3)=0$

$c_4=5$ のとき $8(2c_5-2)=0$

$\therefore c_5=\boxed{1}$ タ

$c_4=83$ のとき $86(2c_5-80)=0$

$\therefore c_5=\boxed{40}$ チツ

- 数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$，$c_4=5$ のとき

  $c_1=\boxed{-3}$，$c_2=\boxed{-3}$，$c_3=-3$，$c_4=5$，$c_5=\boxed{1}$

  セソ　シス　タ

  である。
- 数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$，$c_4=83$ のとき

  $c_1=\boxed{-3}$，$c_2=\boxed{-3}$，$c_3=-3$，$c_4=83$，$c_5=\boxed{40}$

  セソ　シス　チツ

  である。

(タ, チツ両方正解で3点)

(iii) 太郎さんは(i)と(ii)から，$c_n=-3$ となることがあるかどうかに着目し，次の**命題A**が成り立つのではないかと考えた。

> **命題A** 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 \neq -3$ であるとする。このとき，すべての自然数 n について $c_n \neq -3$ である。

命題Aが真であることを証明するには，**命題A**の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$\boxed{\text{テ}}$ ③ (3点) を示せばよい。 数学的帰納法

実際，このようにして**命題A**が真であることを証明できる。 念のため 下で示しておきます

$c_1 \neq -3 \Rightarrow c_2 \neq -3$
$c_2 \neq -3 \Rightarrow c_3 \neq -3$
$\vdots$
$c_k \neq -3 \Rightarrow c_{k+1} \neq -3$
$\vdots$

$\boxed{\text{テ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $c_2 \neq -3$ かつ $c_3 \neq -3$ であること

① $c_{100} \neq -3$ かつ $c_{200} \neq -3$ であること

② $c_{100} \neq -3$ ならば $c_{101} \neq -3$ であること

③ $n=k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと

④ $n=k$ のとき $c_n=-3$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $c_n=-3$ が成り立つこと

$c_1 \neq -3$ とする

①で $n=k$ とに $(c_k+3)(2c_{k+1}-c_k+3)=0$

$c_{k+1}=-3$ と仮定すると

$(c_k+3)(-c_k-3)=0$

$-(c_k+3)^2=0$

$\therefore\ c_k=-3$

すなわち $c_{k+1}=-3$ ならば $c_k=-3$ …B

対偶を考えて $c_k \neq -3$ ならば $c_{k+1} \neq -3$ $(k=1,2,3,\cdots)$

よって 命題Aは真である。

(iv) 次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は，数列$\{c_n\}$に関する命題である。

(Ⅰ) $c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅱ) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅲ) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の真偽の組合せとして正しいものは ト ④ である。

ト(4点)

ト の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(Ⅱ)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(Ⅲ)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

(Ⅰ) B を考えて

$C_{100}=-3$ であると $C_{99}=-3$, $C_{98}=-3$, …, $C_1=-3$

$C_1=3$ とはならないので $\boxed{偽}$

(Ⅱ) $C_1=C_2=\cdots=C_{100}=-3$ を満たすことがあるので $\boxed{真}$

(Ⅲ) (3)(ii) を考えて $C_1=-3$ かつ $C_{100}=3$ を満たすことがあるので $\boxed{真}$

(①で $n=99$ とすると $(C_{99}+3)(2C_{100}-C_{99}+3)=0$

$C_{99}=9$ として　12 $(2C_{100}-6)=0$

$\therefore C_{100}=3$)

$C_3=-3$ のとき C_4 がどのような値でも成り立つが，一般化して

$C_m=-3$ のとき C_{m+1} がどのような値でも成り立つ ← ①で $n=m$ として
$(m=1,2,3,\cdots)$

$(C_m+3)(2C_{m+1}-C_m+3)=0$

$C_n=-3$ とすると

C_{m+1} はどのような値でも成り立つ

これより例えば

$C_1=C_2=C_3=\cdots=C_{98}=-3$, $C_{99}=9$, $C_{100}=3$

を満たすことがある.