

第3問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて47ページの正規分布表を用いてもよい。また、ここでの晴れの定義については、気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。

- (1) 太郎さんは、自分が住んでいる地域において、日曜日に晴れとなる確率を考えている。

晴れの場合は1、晴れ以外の場合は0の値をとる確率変数を X と定義する。また、 $X = 1$ である確率を p とすると、その確率分布は表1のようになる。

表 1

X	0	1	計
確率	$1-p$	p	1

この確率変数 X の平均(期待値)を m とすると

$$m = \boxed{0}$$

となる。

了(2点)

$$m = E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

← $X=1$ の確率

太郎さんは、ある期間における連続した n 週の日曜日の天気を、表1の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし、それらの X を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で表すことにした。そして、その標本平均 \bar{X} を利用して、母平均 m を推定しようと考えた。実際に $n = 300$ として晴れの日数を調べたところ、表2のようになった。

表 2

天気	日数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

表2より

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{75}{300} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

数学II・数学B

母標準偏差を σ とすると、 $n = 300$ は十分に大きいので、標本平均 \bar{X} は近似的に正規分布 $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う。

一般に、母標準偏差 σ がわからないとき、標本の大きさ n が大きければ、 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。 S は

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - (\bar{X})^2}$$

で計算できる。ここで、 $X_1^2 = X_1$, $X_2^2 = X_2$, ..., $X_n^2 = X_n$ であることに着目

し、右辺を整理すると、 $S = \sqrt{\frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (\bar{X})^2}$ と表されることがわかる。

よって、表2より、大きさ $n = 300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる。

アの解答群

- 0 p 1 p^2 2 $1 - p$ 3 $(1 - p)^2$

イの解答群

- 0 σ 1 σ^2 2 $\frac{\sigma}{n}$ 3 $\frac{\sigma^2}{n}$ 4 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ウ, エの解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- 0 \bar{X} 1 $(\bar{X})^2$ 2 $\bar{X}(1 - \bar{X})$ 3 $1 - \bar{X}$

オについては、最も適当なものを、次の0~5のうちから一つ選べ。

- 0 $0.201 \leq m \leq 0.299$ 1 $0.209 \leq m \leq 0.291$
 2 $0.225 \leq m \leq 0.250$ 3 $0.225 \leq m \leq 0.275$
 4 $0.247 \leq m \leq 0.253$ 5 $0.250 \leq m \leq 0.275$

$$\begin{array}{r} 1.96 \\ \times 0.025 \\ \hline 980 \\ 392 \\ \hline 0.04900 \end{array}$$

$N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う

1) $\sqrt{\quad}$ の中は X の分散
2) X_1, X_2, \dots, X_n は0または1

$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおくと $N(0, 1)$ に従い
 $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ より $|\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}| \leq 1.96$
 すなわち $\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$S = \sqrt{\frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (\bar{X})^2}$
 $= \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}$
 $\sigma = S = \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}$
 $= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4}$
 $n = 300$ とおくと
 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{300}}$
 $= \frac{1}{4 \cdot 10}$
 $= 0.025$

$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times 0.025 = 0.049$
 求める信頼区間は
 $0.25 - 0.049 \leq m \leq 0.25 + 0.049$

よって $0.201 \leq m \leq 0.299$

オ

数学Ⅱ・数学B

(2) ある期間において、「ちょうど3週続けて日曜日の天気が晴れになること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では、連続する k 週の日曜日の天気について、(1)の太郎さんが考えた確率変数のうち X_1, X_2, \dots, X_k を用いて調べる。ただし、 k は3以上300以下の自然数とする。

X_1, X_2, \dots, X_k の値を順に並べたときの0と1からなる列において、「ちょうど三つ続けて1が現れる部分」をAとし、Aの個数を確率変数 U_k で表す。例えば、 $k=20$ とし、 X_1, X_2, \dots, X_{20} の値を順に並べたとき

$$1, 1, 1, 1, 0, \underline{1, 1, 1}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \underline{1, 1, 1}$$

A

A

であったとする。この例では、下線部分はAを示しており、1が四つ以上続く部分はAとはみなさないため、 $U_{20} = 2$ となる。

$k=4$ のとき、 X_1, X_2, X_3, X_4 のとり得る値と、それに対応した U_4 の値を書き出すと、表3のようになる。

表 3

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

$U_4 = 1$
 となるものは
 2 (通り)

U_4	0	1
確率	p_0	p_1

とすると

$$E(U_4) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = p_1$$

$\leftarrow U_4 = 1$ の確率

$X_k = 1$ となる確率を $p = \frac{1}{4}$ とすると
 $X_k = 0$ となる確率は $1 - p = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} E(U_4) &= p^3(1-p) \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \times 2 \\ &= \boxed{\frac{3}{128}} \end{aligned}$$

力

数学II・数学B

ここで、 U_k の期待値を求めてみよう。(1)における p の値を $p = \frac{1}{4}$ とする。

$k = 4$ のとき、 U_4 の期待値は

$$E(U_4) = \frac{\boxed{3}}{128} \quad (3点)$$

となる。 $k = 5$ のとき、 U_5 の期待値は

$$E(U_5) = \frac{\boxed{33}}{1024} \quad (3点)$$

となる。

4以上の k について、 k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると、座標平面上の点 $(4, E(U_4)), (5, E(U_5)), \dots, (300, E(U_{300}))$ は一つの直線上にあることがわかる。この事実によって

$$E(U_{300}) = \frac{\boxed{21}}{\boxed{8}} \quad (4点)$$

となる。

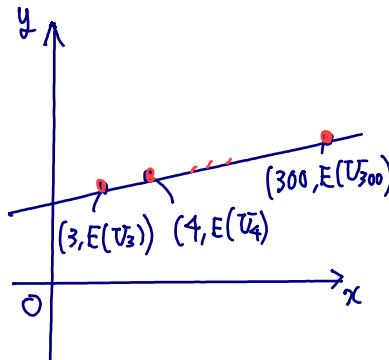
2点 $(4, E(U_4)), (5, E(U_5))$ を通る直線の方程式は

$$\text{傾き} = \frac{\frac{33}{1024} - \frac{27}{1024}}{5 - 4} = \frac{9}{1024}$$

$$y = \frac{9}{1024}(x - 4) + \frac{3}{128}$$

この直線上に点 $(300, E(U_{300}))$ があること

$$\begin{aligned} E(U_{300}) &= \frac{9}{1024}(300 - 4) + \frac{3}{128} \\ &= \frac{9}{128} \cdot \frac{296}{4} + \frac{3}{128} \\ &= \frac{9 \cdot 37 + 3}{128} \\ &= \frac{336}{128} = \frac{16 \cdot 21}{16 \cdot 8} \\ &= \frac{\boxed{21}}{\boxed{8}} \end{aligned}$$



$U_5 \geq 2$ となることはない

$U_5 = 1$ となるのは

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	1	1	0	□
0	1	1	1	0
□	0	1	1	1

(□は0,1どちらでも可)

$E(U_5)$ は $U_5=1$ となる確率なので

$$\begin{aligned} E(U_5) &= p^3(1-p) \times 2 + p^3(1-p)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{24 + 9}{4^5} \\ &= \frac{\boxed{33}}{\boxed{1024}} \end{aligned}$$

↓ 解くにはこの事実を用いる

補) $X_l, X_{l+1}, X_{l+2} \dots (l=1, 2, 3, \dots, k-2)$

が A の部分になるとき $Y_l = 1$
A の部分にならないとき $Y_l = 0$

とすると $U_k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{k-2}$
 $E(U_k) = E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{k-2})$
 $= E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_{k-2})$

$E(Y_l)$ は $Y_l = 1$ の確率に等しい

補) $l=1$ X_1, X_2, X_3, X_4 確率は $p^3(1-p)$

1	1	1	0
---	---	---	---

補) $l=2, \dots, k-3$ $X_{l-1}, X_l, X_{l+1}, X_{l+2}, X_{l+3}$

0	1	1	1	0
---	---	---	---	---

確率は $(1-p)p^3(1-p) = p^3(1-p)^2$

補) $l=k-2$ $X_{k-3}, X_{k-2}, X_{k-1}, X_k$

0	1	1	1
---	---	---	---

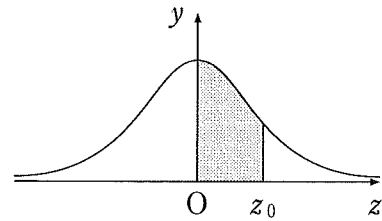
確率は $p^3(1-p)$

$$\begin{aligned} E(U_k) &= p^3(1-p) \times 2 + p^3(1-p)^2 \times (k-4) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (k-4) \\ &= \frac{24 + 9(k-4)}{4^5} \\ &= \frac{9k - 12}{1024} \end{aligned}$$

よって $(k, E(U_k)) (k \geq 4)$ は直線 $y = \frac{9x - 12}{1024}$ 上にある

正 規 分 布 表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990