数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題)(配点 30)

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

両辺を x で微分して $S'(x)=f(x)$

(1) $m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i) $f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{3}\ ア}{\boxed{2}\ イ}$ である。 (2点)

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^x\left(3t^2-\underset{ウ}{\boxed{9}}\,t+\underset{エ}{\boxed{6}}\right)dt \quad (1点)$$
$$=x^3-\frac{\boxed{9}\ オ}{\boxed{2}\ カ}x^2+\underset{キ}{\boxed{6}}\,x \quad (2点)$$

であるから

$x=\underset{ク}{\boxed{1}}$ (1点) のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{5}\ ケ}{\boxed{2}\ コ}$ (1点) をとり

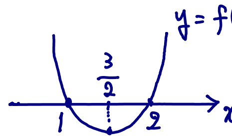
$x=\underset{サ}{\boxed{2}}$ (1点) のとき，$S(x)$ は極小値 $\underset{シ}{\boxed{2}}$ (1点) をとることがわかる。

$f(x)=3(x^2-3x+2)$

$f'(x)=3(2x-3)$

$f'(x)=0$ とすると $x=\boxed{\dfrac{3}{2}}$ ア イ

補 $f'(x)=0$ となる x は $y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標



$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

$=\boxed{\int_0^x(3t^2-9t+6)\,dt}$ ウ エ

$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$

$=\boxed{x^3-\frac{9}{2}x^2+6x}$ オ カ キ

$S'(x)=3x^2-9x+6$

$=3(x-1)(x-2)$

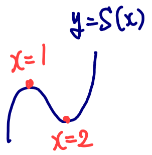
$=f(x)$

$S(1)=1-\frac{9}{2}+6=\frac{5}{2}$

$S(2)=8-18+12=2$

$x=\boxed{1}$ ク のとき $S(x)$ は極大値 $\boxed{\frac{5}{2}}$ ケ コ

$x=\boxed{2}$ サ のとき $S(x)$ は極小値 $\boxed{2}$ シ



x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$

(iii) $f(3)$と一致するものとして，次の⓪～④のうち，正しいものは $\boxed{\text{③}}$ である。

ス(3点)

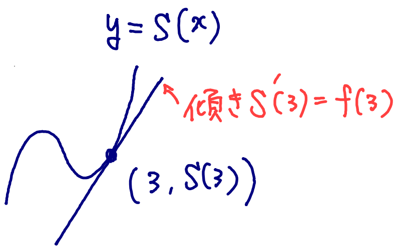
$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪	$S(3)$
①	2点$(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$を通る直線の傾き
②	2点$(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$を通る直線の傾き
③	関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き
④	関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$(3,\ f(3))$における接線の傾き

$S'(x)=f(x)$

より

$S'(3)=f(3)$



$f(3)$ は $S(x)$ の $x=3$ における微分係数なので

$y=S(x)$ のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き

と一致する　$\boxed{③}$ // ス

数学Ⅱ・数学B

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1 \leqq x \leqq m$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 = \boxed{\text{セ}}$ 0，$S_2 = \boxed{\text{ソ}}$ 5 である。

（セ，ソ両方正解で2点）

$S_1 = S_2$ となるのは $\boxed{\text{タ}}$ 1 $= 0$ のときであるから，$S_1 = S_2$ が成り立つようなf(x)に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{チ}}$ 1 である。また，$S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ツ}}$ 2 である。

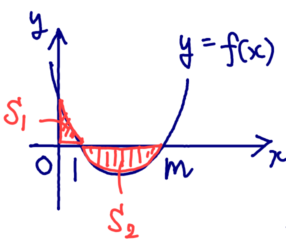
タ（2点）　チ（4点）　ツ（2点）

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ セ	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$	② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$	④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$ ソ

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx$	



$S_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　$\boxed{0}$ // セ

$S_2 = \displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$　$\boxed{5}$ // ソ

$S_1 = S_2$ となるのは $S_1 - S_2 = 0$

より

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx = 0$

よって　$\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx = 0$　$\boxed{1}$ // タ

$y = S(x)$

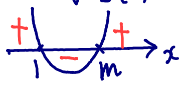
について

$y' = S'(x) = f(x)$

$= 3(x-1)(x-m)$

$y' = 0$ とすると $x = 1, m$　$(1 < m)$

$y = S'(x)$



x	…	1	…	m	…
$S'(x)$	+	0	−	0	+
$S(x)$	↗		↘	$S_1 - S_2$	↗

極小値でグラフの概形がみえる

$S(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$S(m) = \displaystyle\int_0^m f(x)\,dx = S_1 - S_2$

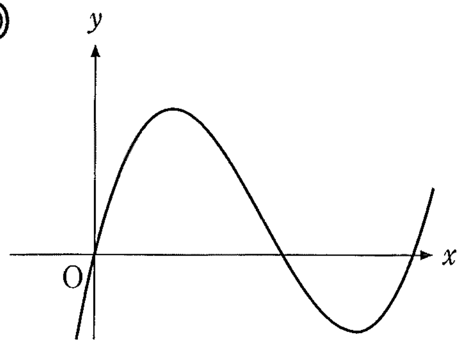
$S_1 = S_2$ のとき $y = S(x)$ のグラフの概形は

$S(m) = 0$ なので $\boxed{1}$ // チ

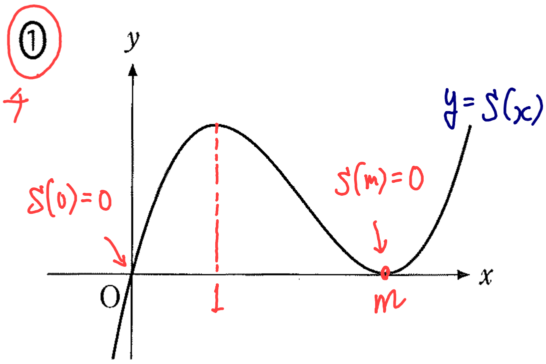
$S_1 > S_2$ のとき $S(m) > 0$ なので $\boxed{2}$ // ツ

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

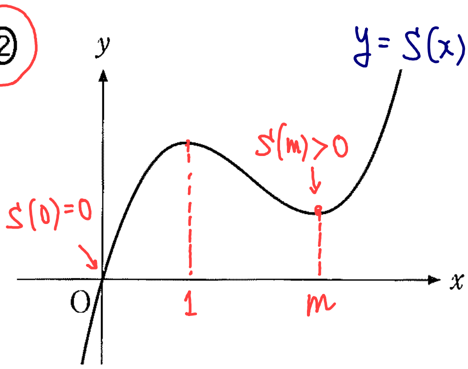
⓪



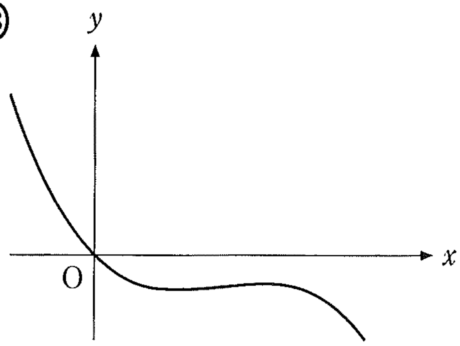
①
チ



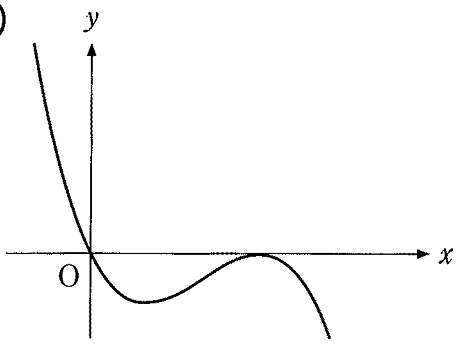
②
ツ



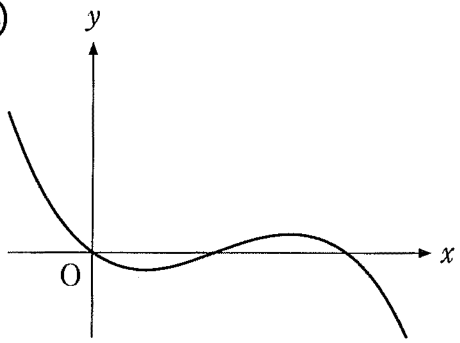
③



④



⑤



(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

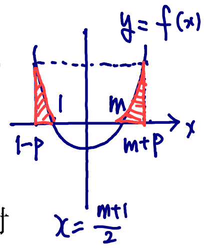
$y=f(x)$ のグラフは $y=0$ のとき $x=1, m$ より
直線 $\boxed{x=\frac{m+1}{2}}$ に関して対称　$\boxed{③}$ テ

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{③}$ （$\frac{m+1}{2}$）に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

テ（1点）

右図の斜線部の面積より

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx = \int_{m}^{\boxed{m+p}} f(x)\,dx \quad \cdots ① \qquad \boxed{④}\ ト$$



$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx = \int_{m}^{\boxed{④}} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

ト（$m+p$）

が成り立ち，$M=\boxed{}$（$\frac{m+1}{2}$）とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

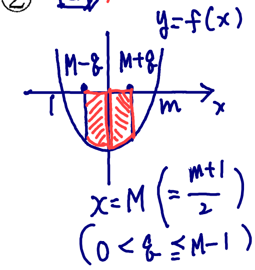
右下図の斜線部の面積より

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx = \int_{M}^{\boxed{M+q}}\{-f(x)\}\,dx \quad \cdots ② \qquad \boxed{②}\ ナ$$

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx = \int_{M}^{\boxed{②}}\{-f(x)\}\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

ナ（$M+q$）

（ト，ナ両方正解で3点）



が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = S(\beta)-S(\alpha) \quad \cdots ㊀$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S(\boxed{m+p}) = \boxed{⓪}$$

ト　　ニ（$S(1)+S(m)$）

$$2S(M) = \boxed{④}$$

ヌ（$S(M+q)+S(M-q)$）

となる。

（ニ，ヌ両方正解で2点）

㊀を用いて①は

$S(1)-S(1-p) = S(m+p)-S(m)$

$\therefore\ S(1-p)+S(m+p) = \boxed{S(1)+S(m)} \cdots ③$　$\boxed{⓪}$ ニ

㊀を用いて②は

$-\{S(M)-S(M-q)\} = -\{S(M+q)-S(M)\}$

$\therefore\ 2S(M) = \boxed{S(M+q)+S(M-q)} \cdots ④$　$\boxed{④}$ ヌ

　以上から，すべての正の実数 p に対して，2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(\boxed{m+p},\ S(\boxed{m+p}))$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の⓪～⑤のうち，最も適当なものは $\boxed{②}$ である。

ト　　ト

中点は p によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ 上にある

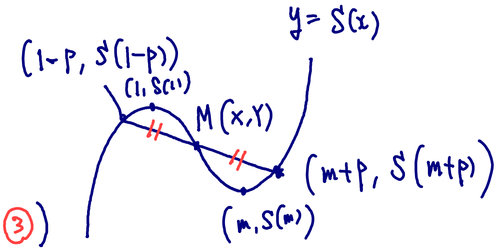
ネ（2点）

中点Mは3次曲線 $y=S(x)$ の対称点（変曲点）

2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点を $M(X,Y)$ とすると

$$X = \frac{(1-p)+m+p}{2} = \frac{1+m}{2}$$

$$Y = \frac{S(1-p)+S(m+p)}{2} = \frac{S(1)+S(m)}{2} \quad (\because ③)$$



④で $\begin{cases} M+q=m \\ M-q=1 \end{cases}$ とすると $M=\frac{m+1}{2}$ なので $2S\left(\frac{m+1}{2}\right) = S(m)+S(1)$　$\therefore\ \frac{S(1)+S(m)}{2} = S\left(\frac{m+1}{2}\right)$

すなわち $Y=S(X)$ をみたす。よって，中点Mは p によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ 上にある。$\boxed{②}$ ネ

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{ネ}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。
① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。
② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。
④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。